



• میثم بزرگر

- ریاضی عمومی (۲)
- امیدوارم کمکی برای دانشجویان باشد

در صورت وجود اشکال با ایمیل اینجانب درمیان بگذارید

- میثمبرزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM



رویه ها

استوانه - رویه دوار - سایر رویه های درجه دوم-مخروط

• میثم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

۱- استوانه

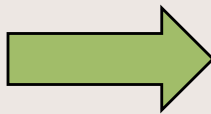
- میثم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

تعریف: هر گاه c يك منحنی (منحنی هادی استوانه) در يك صفحه و L خطی ناواقع بر این صفحه باشد، خطی که متکی بر c و موازی با L حرکت کند (مولد استوانه) رویه ای تولید میکند که استوانه یا رویه استوانه ای نام دارد

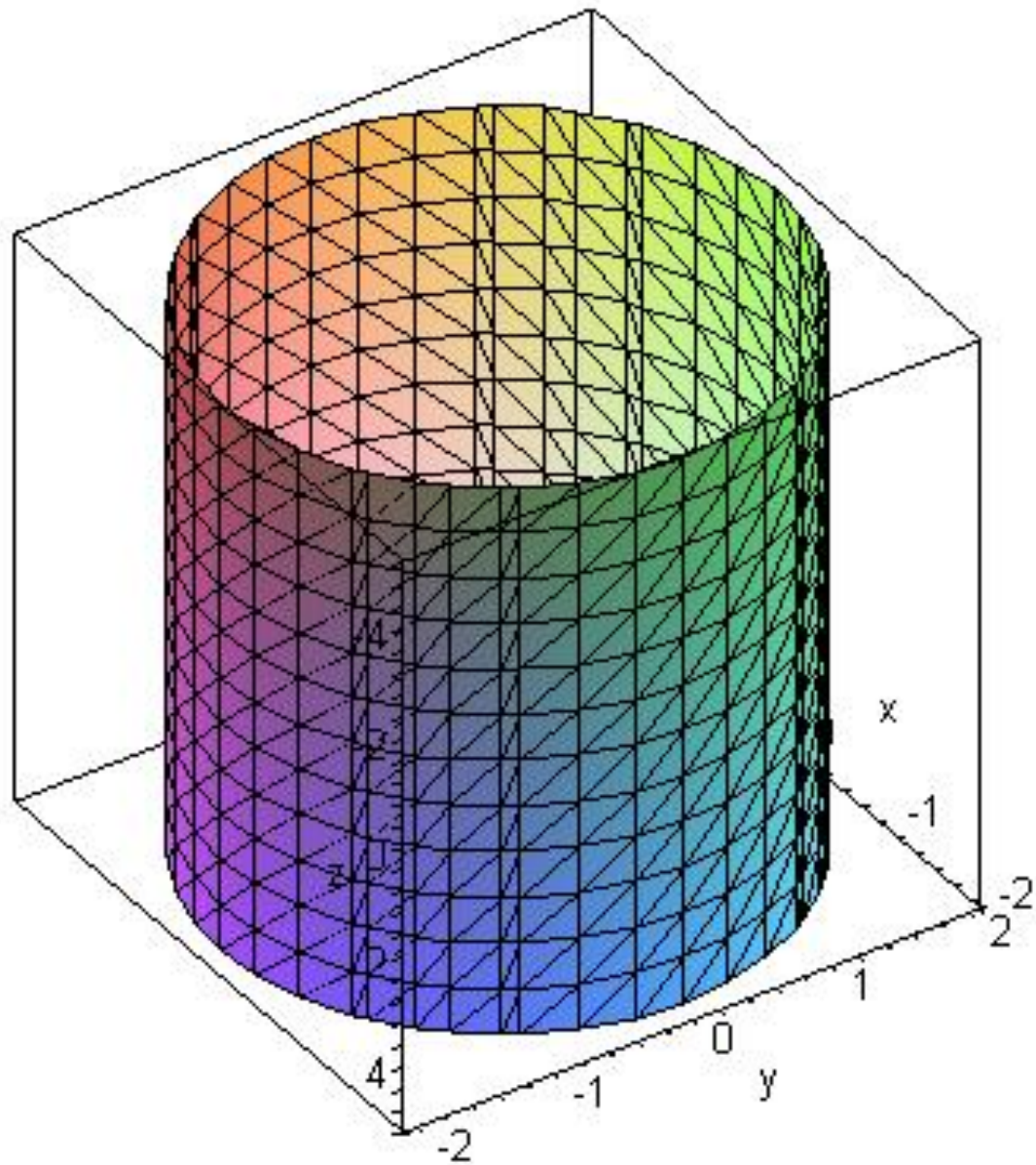
$$c: x^2 + y^2 = 1$$

$$L: Z = 0$$



$$\bullet \text{ استوانه } x^2 + y^2 = 1$$

• مثال:



• میثم بزرگر

راه حل كلي حل مسايل: فرض

$$c \begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

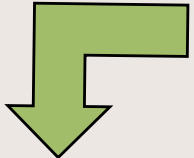
- هادي و D يك مولد استوانه باشد:
- D را به شكل فصل
$$c \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \lambda \\ a_2x + b_2y + c_2z = \mu \end{cases}$$
- مشترك دو صفحه در نظر ميگيريم و دستگاه معادلات حاصل را با حذف x, y, z حل ميكنيم و سپس بجاي λ, μ مقدار ميگذاريم. معادله استوانه بدست ميآيد.

مثال: معادله استوانه ای را بنویسید که خم هادی و امتداد مولد آن داده شده است:

$$C \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = \frac{a}{2} \end{cases}, D: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{3}$$

حل: فرض کنید:

$$\frac{x}{2} - y = t, \quad \frac{x}{2} - \frac{z}{3} = r$$

داریم: 

ادامه حل:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$x + y + z = \frac{a}{2} \Rightarrow z = \frac{a}{2} - x - y$$

$$c \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} - y = t \end{array} \right.$$

$$\frac{x}{2} - \frac{z}{3} = r \Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{2} - x - y \right) = r$$

$$x = \frac{t}{3} + r + \frac{a}{6}, y = \left(-\frac{5}{6}\right)t + \frac{r}{2} + \frac{a}{12}, z = \frac{t}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)r + \frac{a}{4}$$

ادامه حل: x, y, z را در معادله کره قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{4} + \frac{25}{36} + \frac{1}{9}\right)t^2 + \left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1\right)r^2 + \left(-\frac{3}{2} - \frac{5}{6} - \frac{2}{3}\right)tr + \\ & + \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{36} + \frac{1}{9}\right)ta + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right)ra + \\ & + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{144} + \frac{1}{36}\right)a^2 = a^2 \end{aligned}$$

پس از ساده کردن و جایگذاری t, r بر حسب x, y, z داریم:

ادامه حل:

$$76\left(\frac{x}{2} - y\right)^2 + 252\left(\frac{x}{2} - \frac{z}{3}\right)^2 - 120\left(\frac{x}{2} - \frac{z}{3}\right)\left(\frac{z}{2} - y\right) +$$

$$+ 16\left(\frac{x}{2} - y\right)a - 30\left(\frac{x}{2} - \frac{z}{3}\right)a = 65a^2$$

پس از ساده کردن نتیجه نهایی چنین میشود:

$$22x^2 + 76y^2 + 28z^2 - 64xz - 40zy -$$

$$- 16ay - 7ax + 10a - 16xy = 65a^2$$

۲- رویه دوار

• میثم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

تعریف: منحنی c و خط L را که هر دو روی یک صفحه واقع هستند را در نظر میگیریم: اگر c (مولد رویه) حول L (محور دوران) دوران کند. رویه ای ایجاد میشود که رویه دوار نام دارد.

روش حل: در صورتی که منحنی در یکی از صفحات مختصات و محور دوران یکی از محورهای مختصات باشد کافی است در معادله منحنی فقط بجای نام متغیری که محور دوران نیست جذر مجموع مربعات دو محور غیر دوران را جایگذاری کنیم.

معادله رویه دوار محور دوران معادله منحنی

$F(x,y)=0$	محور x	$F(x, \pm\sqrt{y^2+z^2})=0$
$Z=0$	محور y	$F(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y)=0$
$F(y,z)=0$	محور y	$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$
$X=0$	محور z	$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$
$F(z,x)=0$	محور z	$F(z, \pm\sqrt{x^2+y^2})=0$
$y=0$	محور x	$F(\pm\sqrt{y^2+z^2}, x)=0$

مثال: رویه حاصل از دوران خم $xy=1$ حول محور x را پیدا کنید.

حل:

$$x\sqrt{y^2 + z^2} = 1$$

۳- سایر رویه های درجه دوم

اصول كلي رسم نمودار رويه ها:

- ۱- محل برخورد با محور هاي مختصات را بدست آوريد. مثلا: با قرار دادن $y=z=0$
- ۲- محل برخورد با صفحات مختصات را بدست آوريد. مثلا: با قرار دادن $z=0$
- ۳- محل برخورد با صفحات موازي صفحات مختصات را بدست آوريد. مثلا: با قرار دادن $z=k$

صورت كلي رويه هاي درجه دوم:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

حالت خاص: اگر ضرايب جملات حاصلضرب صفر شود

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

روش حل مسایل حالت خاص:

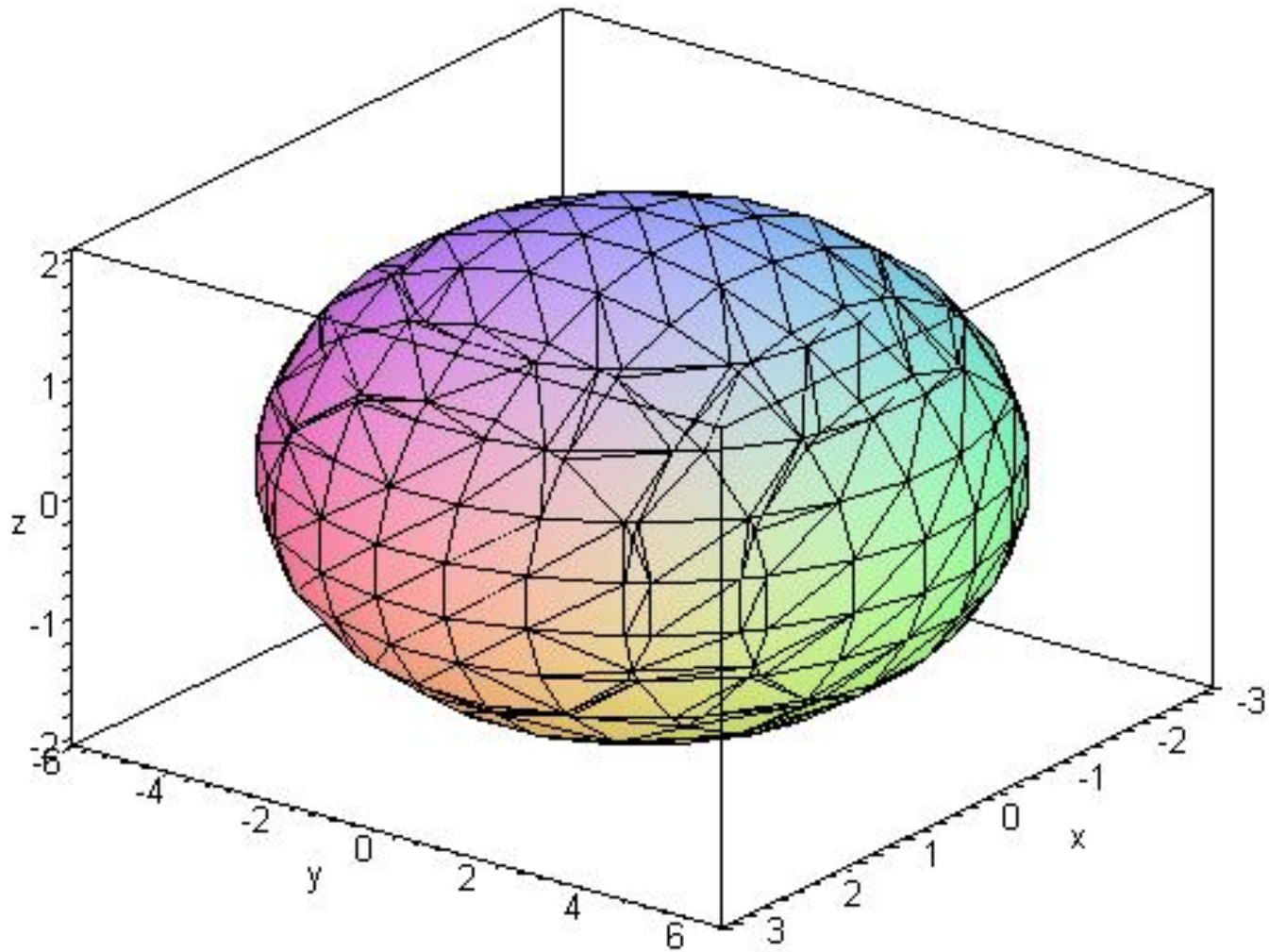
- عبارتهای درجه دوم در معادله را به مربع کامل تبدیل کرده و معادله را به یکی از صورتهای استاندارد (استاندارد) در میآوریم.
- معادلات استاندارد در ادامه توضیح داده خواهد شد.

۳-۱- بیضوي:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

روش شناخت:

سه جمله مربع هم علامت سمت چپ و عدد يك سمت راست تساوي

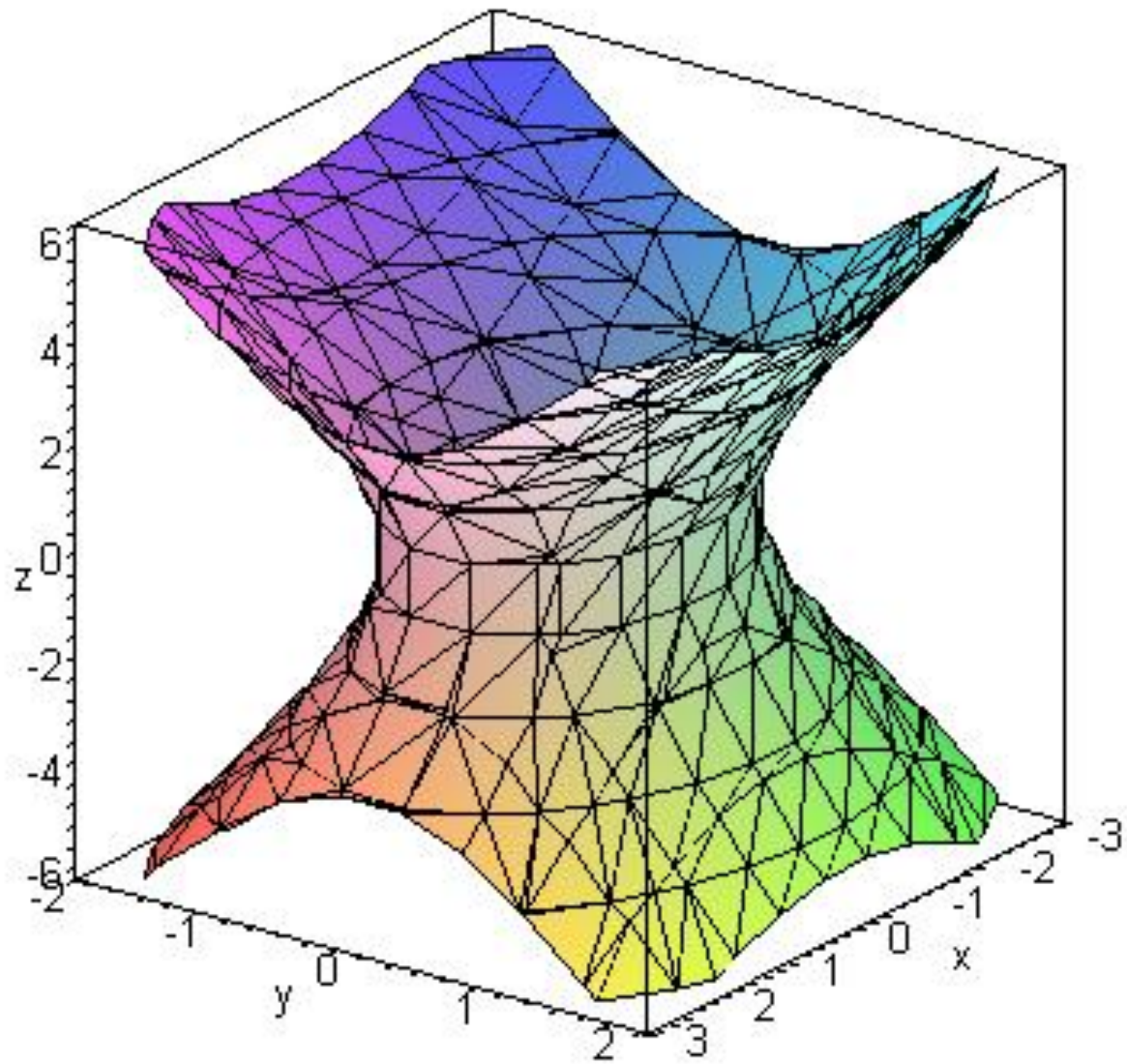


۳-۲- هذلولي وار يك پارچه:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

روش شناخت:

سه جمله مربع كه فقط يك جمله منفي (كه نشان دهنده محور شكل است) سمت چپ و عدد يك سمت راست تساوي.



• میثم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

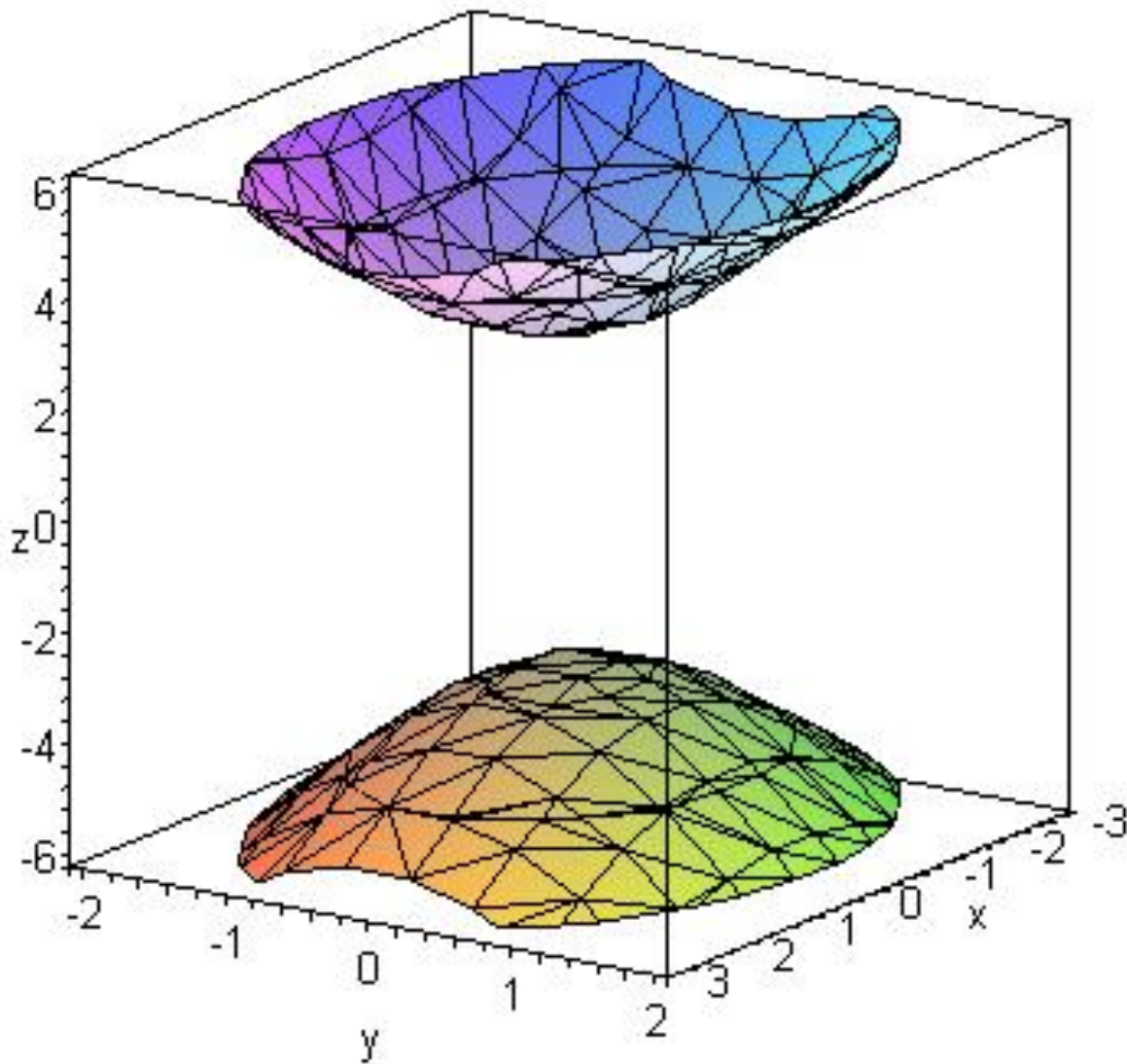
۳-۳ - هذلولي وار دو پارچه:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

روش شناخت:

سه جمله مربع که دو جمله منفي سمت چپ (جمله مثبت نشان دهنده محور است) و عدد يك سمت راست

تساوي



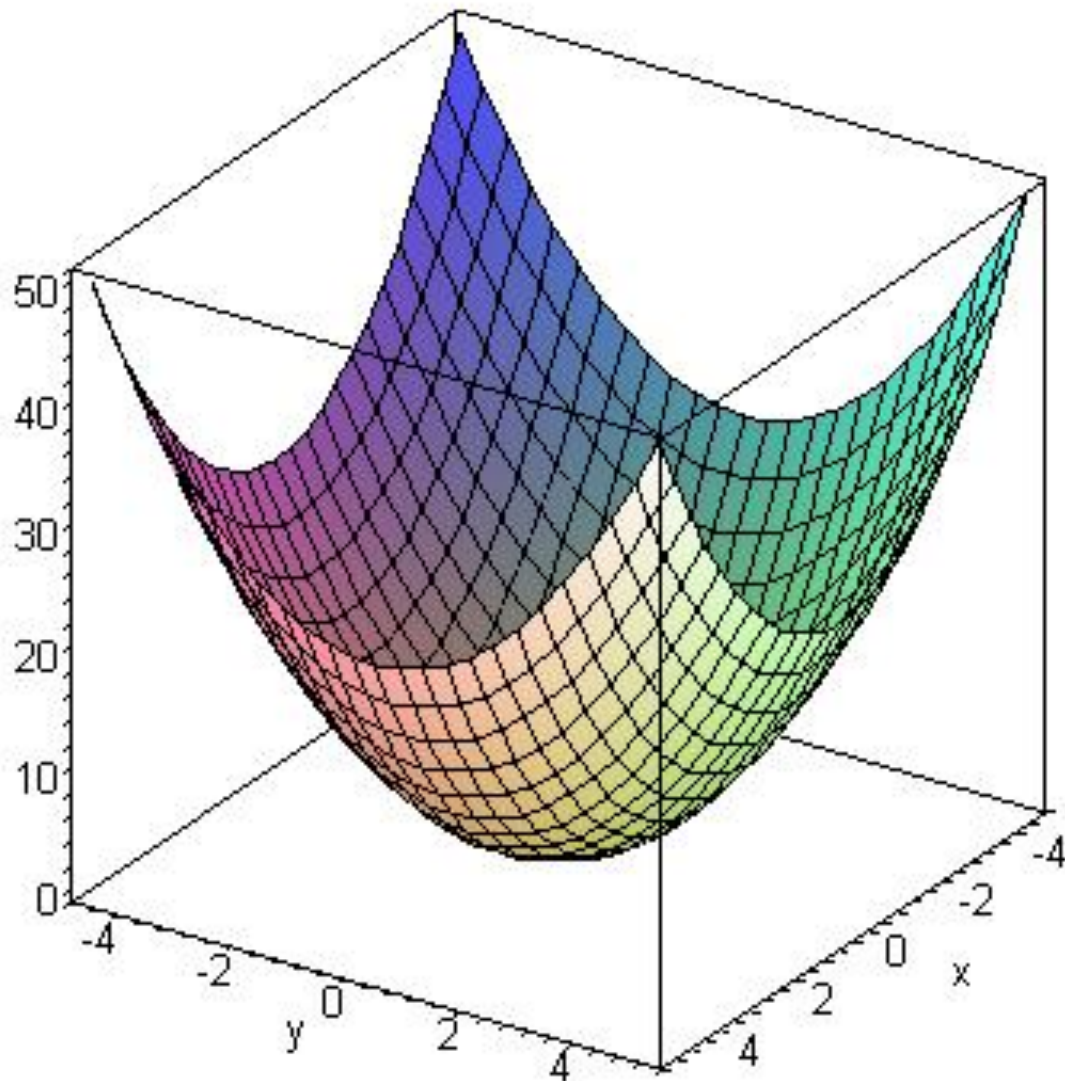
• میثم برزگر

۳-۴ - سه‌می وار:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

روش شناخت:

دو جمله مربع در يك سمت و يك جمله درجه يك در
سمت ديگر تساوي. همه جملات هم علامت (جمله
درجه يك نشان دهنده محور است)



• میثم برزگر

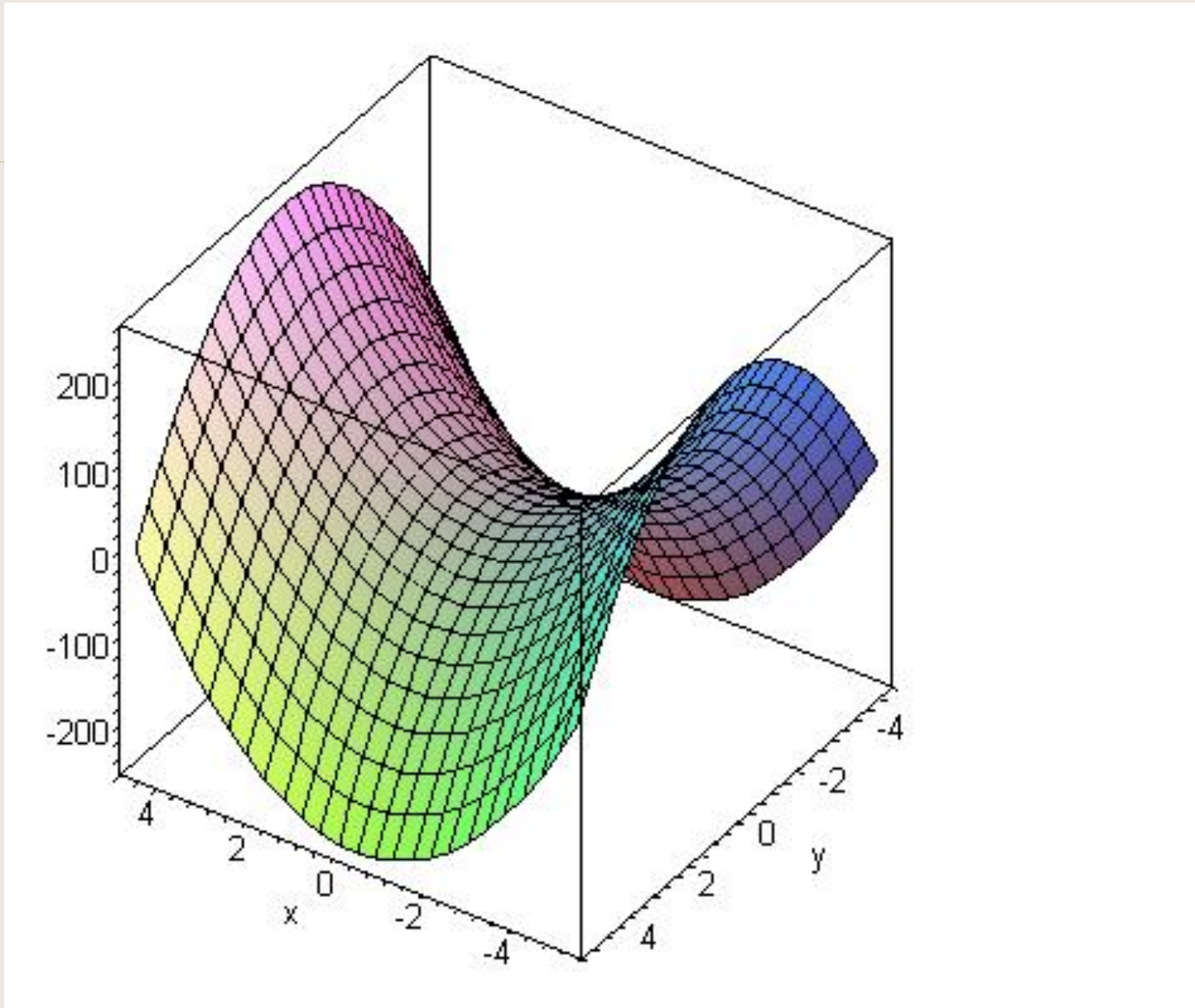
MEYSAM4366@YAHOO.COM

۳-۴ - سهمي وار هذلولوي (زين اسبي):

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

روش شناخت:

دو جمله مربع مختلف علامه در يك سمت ويك جمله
درجه يك در سمت ديگر تساوي (جمله درجه يك نشان
دهنده محور است)



• میثم بزرگر

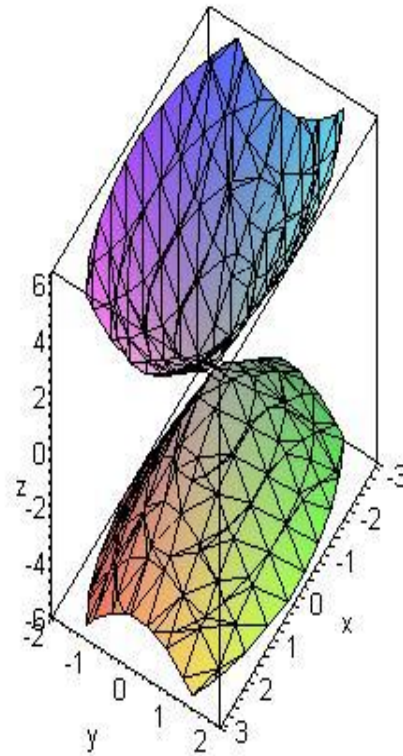
MEYSAM4366@YAHOO.COM

۳-۴. مخروط:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

روش شناخت:

دو جمله مربع در يك سمت و يك جمله مربع در سمت ديگر تساوي (جمله تكي نشان دهنده محور است)



• میثم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

مثال: رویه زیر را شناسایی کنید:

$$6x^2 + 2y^2 - 3z^2 + y = 0$$

حل:

$$6x^2 + 2\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} - 3z^2 = 0 \rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2 + 2\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - 3z^2 = \frac{1}{8}$$

هذلولیوار یک پارچه

روش حل مسایل رویه ها در حالت کلی:

- ۱- ماتریس صورت درجه دوم را مینویسیم.
- ۲- مقادیر ویژه را بدست میآوریم (ضرایب جملات درجه دوم جدید)
- ۳- بردارهای ویژه را بدست میآوریم.
- ۴- ماتریس تبدیل مختصات را مینویسیم (با قرار دادن بردارهای ویژه در ستونها).
- ۵- معادلات تبدیل مختصات را بدست میآوریم و در عبارت درجه یک قرار میدهیم.
- ۶- نتیجه بند ۲ و ۵ را در یک عبارت ساده میکنیم.

مثال: رویه درجه دوم زیر را شناسایی کنید:

$$3x^2 + 4y^2 + 5z^2 + \underset{2+2}{4}xy - \underset{-2-2}{4}yz + 2x + 3y + 4z = 20$$

حل:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda) + 0 + 0 - [0 + 4(3-\lambda) + 4(5-\lambda)] = 0$$

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 20) + 8\lambda - 32 = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 20\lambda + 3\lambda^2 - 27\lambda + 60 + 8\lambda - 32 = 0 \Rightarrow$$

ادامه حل:

$$-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28 = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda - 1)(-\lambda^2 + 11\lambda - 28) = 0 \Rightarrow -(\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 7) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 7$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ -2y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$v_1 = y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow u_1 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 4,$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 2y \end{cases}$$

ادامه حل:

$$\mathbf{v}_2 = y \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \lambda_3 = 7 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ -2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}y \\ z = -y \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = y \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{u}_3 = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ادامه حل: ماتریس تبدیل مختصات:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

معادلات تبدیل مختصات که باید در عبارت درجه یک جایگذاری کرد:

$$x = \frac{1}{3}(-2x' + 2y' + z')$$

$$y = \frac{1}{3}(2x' + y' + 2z'), z = \frac{1}{3}(x' + 2y' - 2z')$$

ادامه حل: حال λ_i را بترتیب ضریب x', y', z' و معادلات تبدیل مختصات را در عبارت درجه یک قرار میدهیم:

$$x'^2 + 4y'^2 + 7z'^2 + \frac{2}{3}(-2x' + 2y' + z') + (2x' + y' + 2z') + \frac{4}{3}(x' + 2y' - 2z') = 20$$

$$x'^2 + 4y'^2 + 7z'^2 + 2x' + 5y' = 20$$

ادامه حل:

$$(x' + 1)^2 - 1 + 4\left(y' + \frac{5}{8}\right)^2 - \frac{25}{16} + 7z'^2 = 20$$

$$(x' + 1)^2 + 4\left(y' + \frac{5}{8}\right)^2 + 7z'^2 = 20 + 1 + \frac{25}{16}$$

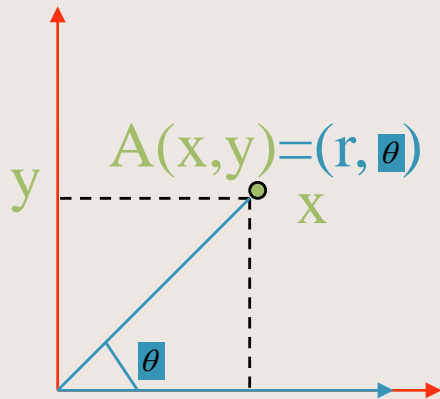
بیضوي است.

مختصات

• میثمبرزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

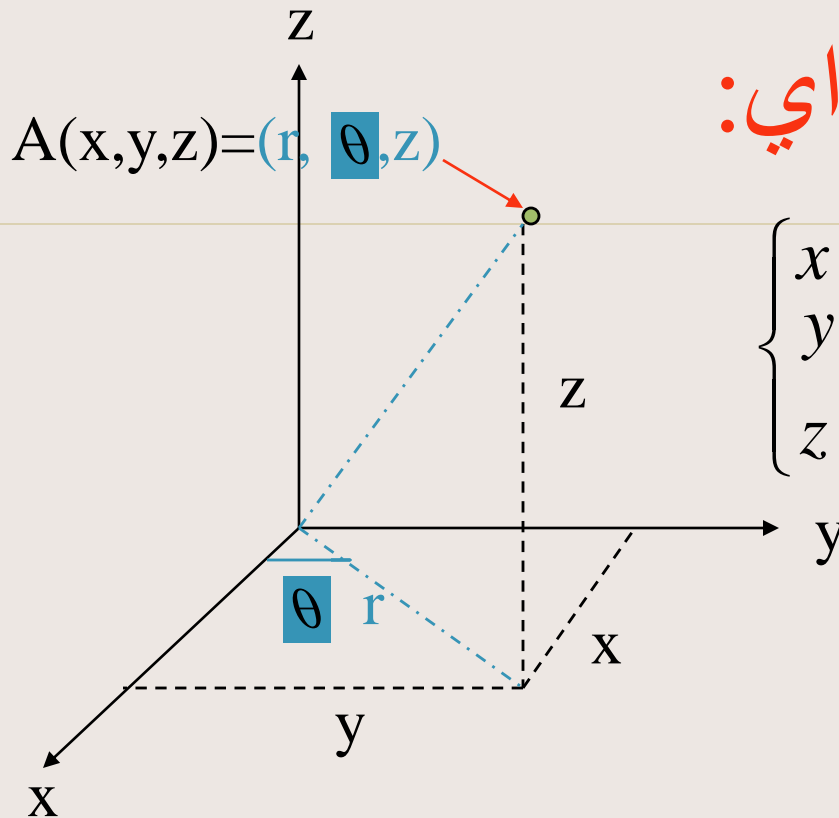
مختصات قطبي:



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

قرارداد: $r \geq 0, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$

مختصات استوانه ای:



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) : x \geq 0 \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) : x < 0 \\ z = z \end{cases}$$

قرار داد:

$$r \geq 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

معرفی بعضی شکلها در مختصات استوانه ای:

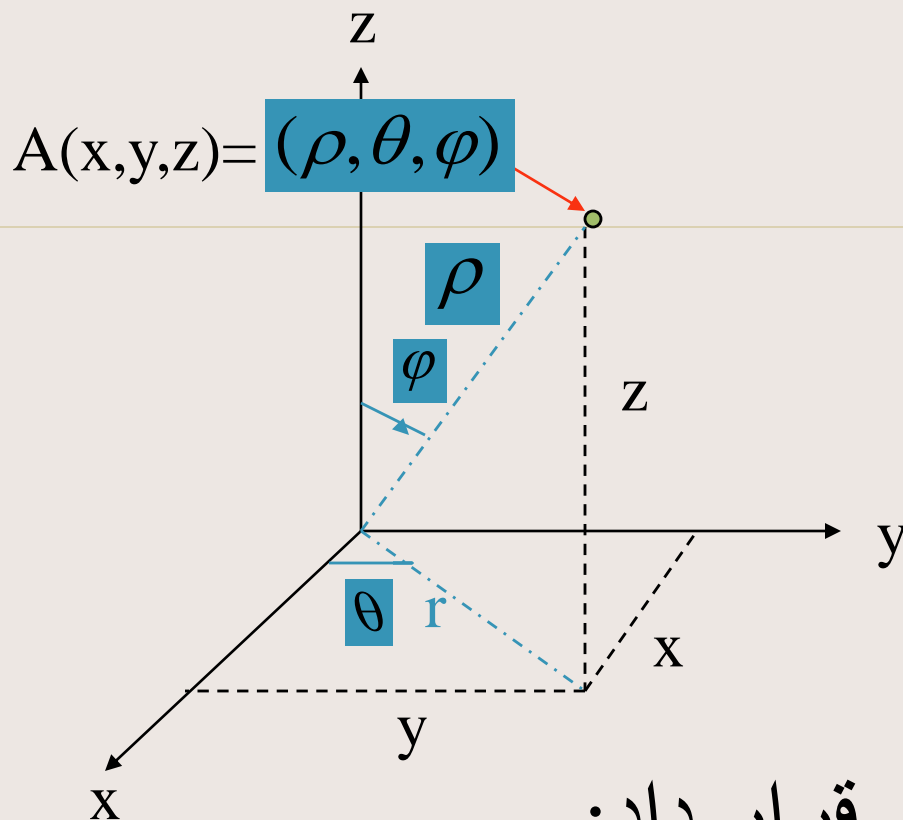
$R=0$ محور z است.

معادله استوانه در مختصات دکارتی $x^2 + y^2 = c^2$
 $R=c$ معادله همان استوانه در مختصات استوانه ای

$\theta = \theta_0$ مجموعه نیم صفحه شامل محور z و نیم خط

$$r \geq 0$$

$Z=c$ معادله یک صفحه که محور z بر آن عمود است



$$A(x, y, z) = (\rho, \theta, \varphi)$$

قرار داد:

$$\rho \geq 0, \quad -\pi < \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

مختصات کروی:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1} \frac{y}{x} & x \geq 0 \\ \tan^{-1} \frac{y}{x} & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{z}{\rho}$$

معرفی بعضی شکلها در مختصات کروی:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow \rho = r$$

کره ای به شعاع r در مختصات دکارتی

کروی

$\theta = \theta_0$ نمودار نیم صفحه ای شامل محور z

$\varphi = \varphi_0$ نمودار نیم مخروط

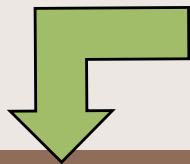
توابع برداري

• میثم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

تعريف تابع برداري يك متغيره:

- تابع $n=3$ را يك تابع برداري يك متغيره، مجموعه A را دامنه و مجموعه را برد اين تابع مينامند.
- به ازاي $n=2$ و $f(t)$ را ميتوانيم به صورت A در آن توابعي حقيقي روي A هستند. از طرف ديگر $f(t)$ معرف نقطه اي چون است. بنابر اين داريم:



ادامه تابع برداري: $x = f_1(t), y = f_2(t)$

- معادلات فوق را معادلات پارامتری نگاره f ، و توابع t^1, t^2 را مؤلفه های f و متغیر t را يك پارامتر مینامند.

• به همین ترتیب:

$$n=3, f_i : A \rightarrow R \quad \forall i=1,2,3, f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) : t \in A$$

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t)$$

مؤلفه ها

معادلات پارامتری

مثال: معادلات پارامتری نگاره f
 را بنویسید. این نگاره چه شکلی دارد؟

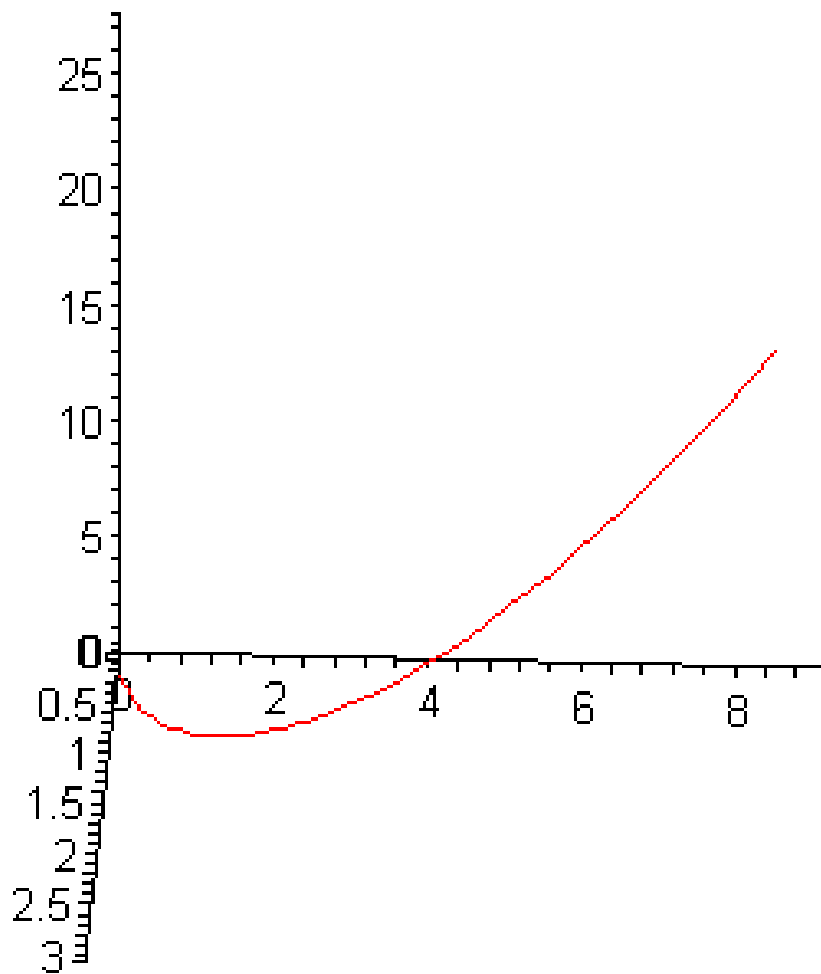
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, f(t) = (t, t^2, t^3)$$

حل:

$$x = t, y = t^2, z = t^3$$

معادلات پارامتری





تعریف حد: تابع برداری $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ با

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (f(t) = (f_1(t), f_2(t)))$$

$$t = t_0 \text{ در } (f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)))$$

دارای حد $L = (l_1, l_2, l_3), L = (l_1, l_2)$ است اگر

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f_1(t) = l_1, \lim_{t \rightarrow t_0} f_2(t) = l_2, \lim_{t \rightarrow t_0} f_3(t) = l_3$$

- به عبارت دیگر تابع f در نقطه t_0 حد دارد اگر و تنها اگر هر یک از مؤلفه‌های آن در این نقطه حد داشته باشد

مثال: حد تابع زیر را در $t=0$ پیدا کنید:

$$f(t) = (\sin t, t^2 + 1)$$

حل:

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\sin t, t^2 + 1) = (0, 1)$$

تعریف پیوستگی: تابع $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ که در آن $n=2$ یا $n=3$ در نقطه $t = a \in A$ پیوسته است اگر داشته

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$$

باشیم:

F را روی A پیوسته نامند اگر در هر یک از نقاط A پیوسته باشد. یعنی وقتی که هر یک از مؤلفه های آن پیوسته باشد.

مثال: آیا تابع زیر در نقطه داده شده

$$f(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{1}{1-t}, t \ln t \right), t = 0$$
 پیوسته است؟

حل: چون مؤلفه اول پیوسته نیست بنابراین تابع پیوسته نیست.

تعریف اثر: اگر $f: [a, b] \rightarrow R^n$ با $a < b$

و $n=2$ یا $n=3$ تابعی پیوسته روی $[a, b]$

باشد، آنگاه f را یک خم در R^2 یا R^3

مینامند. نگاره f یعنی مجموعه

$$f[a, b] = \{f(t) \mid t \in [a, b]\}$$

را اثر یا مسیر خم (و گاه خود خم) گویند.

روش یافتن اثر خم: با نقطه یابی یا پیدا کردن محل برخورد دو رویه که از حذف پارامتر بین هر دو مؤلفه تابع بدست میآید.

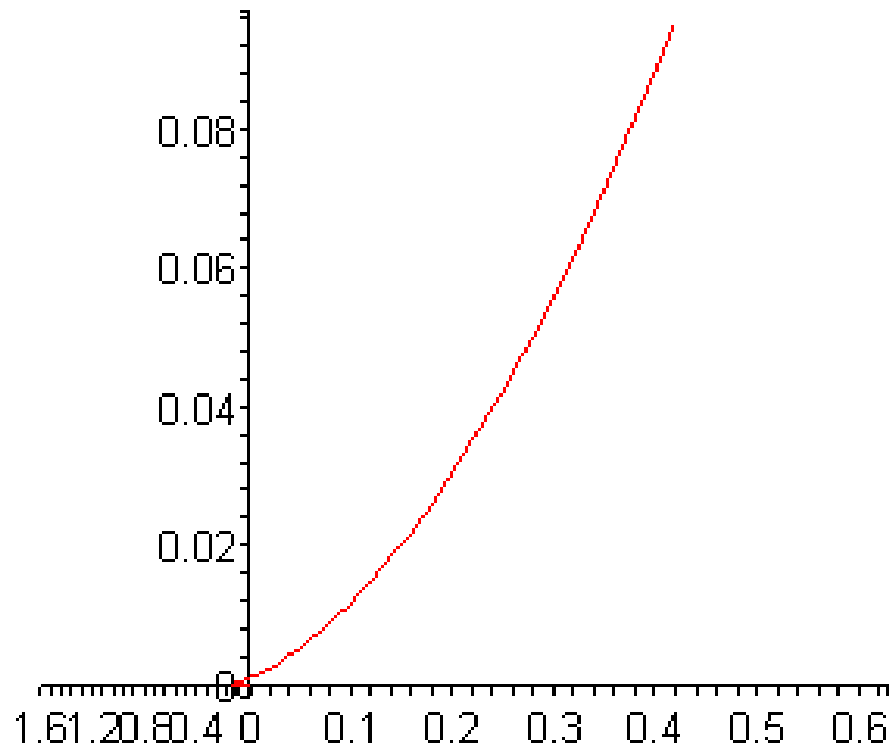
• **مثال:** قسمتی از خم زیر که در یک هشتم

اول دستگاه مختصات است را بدست آورید:

$$y^2 = 4z, x^2 = 4y$$

• **حل:**





• میثم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

ادامه حل: $q:(x=OB-AB, y=OD+DE)$

مسافت طی شده بوسیله q :

$$o_1q = B_1q = a_1t$$

در مثلث قائم الزاویه CFq داریم:

$$AB=CF, DE=Fq$$

$$CF = a_1 \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = a_1 \sin t$$

$$Fq = a_1 \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = -a_1 \cos t$$

$$x = at - a_1 \sin t, y = a - a_1 \cos t$$

تعریف مشتق: تابع برداری f در نقطه $x=t$ مشتق پذیر است اگر حد زیر وجود داشته

باشد: $f : [a, b] \rightarrow R^n, (n = 2 \text{ or } 3), x = t \in [a, b]$

$$\lim_{x \rightarrow t} \frac{1}{x-t} (f(x) - f(t))$$

• بدیهی است در نقاط $t=a, t=b$ منظور از وجود حد فوق، وجود حدهای یکطرفه است. در این صورت حد فوق را **مشتق f در نقطه t** مینامند و با نمادهای زیر نشان میدهند:

$$\frac{df}{dt} = f'(t)$$

توضیح: به ازای $n=2$ $f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t))$:

به ازای $n=3$: $f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$

- بنابر این f در نقطه t مشتق پذیر است اگر و تنها اگر مؤلفه های آن در این نقطه مشتق پذیر باشند

• **مثال:** مشتق تابع رادر نقطه داده شده پیدا

کنید.

$$f(x) = (e^{1-x^2}, \ln x, 1-x^2), x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = (-2xe^{1-x^2}, \frac{1}{x}, -2x) \Rightarrow f'(\frac{1}{2}) = (-e^{\frac{3}{4}}, 2, -1)$$

قضيه: (قواعد مشتق گيري)

$$\phi : [a, b] \rightarrow R,$$

$$n = 2 \text{ or } 3 : \quad g, f : [a, b] \rightarrow R^n, \alpha, \beta \in R^n$$

$$((\alpha f + \beta g))'(t) = \alpha f'(t) + \beta g'(t)$$

$$(f \cdot g)'(t) = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

$$(f \times g)'(t) = f'(t) \times g(t) + f(t) \times g'(t)$$

$$(\phi f)'(t) = \phi'(t) f(t) + \phi(t) f'(t)$$

$$f(t) = (\sqrt{t+1}, t^2 - 1, 2t), g(t) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, 2t\right)$$

مثال:

$$\phi(t) = \ln(2t + 1), (f \cdot g)'(0) = ?, (f \times g)'(0) = ?, (\phi f)'(0) = ?$$

$$f(0) = (1, -1, 0), g(0) = (0, -1, 0), \phi(0) = 0$$

حل:

$$g'(x) = \left(\frac{2(t^2 + 1) - 4t^2}{(t^2 + 1)^2}, \frac{2t(t^2 + 1) - 2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2}, 2\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}}, 2t, 2\right), \phi'(t) = \frac{2}{2t + 1}$$

$$f'(0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right), g'(0) = (2, 0, 2), \phi'(0) = 2$$

$$(f \cdot g)'(0) = f'(0) \cdot g(0) + f(0) \cdot g'(0)$$

ادامه حل:

$$(f \times g)(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (2, 0, \frac{1}{2}) + (-2, -2, 2) = (0, -2, \frac{3}{2})$$

$$(\phi f)'(0) = \phi'(0)f(0) + \phi(0)f'(0) = 2(1, -1, 0) = (2, -1, 0)$$

$$t \in [a, b]$$

قضیه: (قاعده زنجیره ای)

$$[a, b] \xrightarrow{f} I \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \quad n = 2 \text{ or } 3$$

$f[a, b] \subset I$

- توابع فوق را با I که بازه ای در \mathbb{R} است در نظر بگیرید. فرض کنید f در نقطه t و g در $s=f(t)$ مشتق پذیر است. در این صورت تابع برداری $g \circ f$ در نقطه t مشتق

پذیر است و داریم

$$\frac{d(g \circ f)}{dt} = \frac{dg}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dg}{ds} \frac{df}{dt} = (g \circ f)'(t) = g'(f(t)) f'(t)$$

مثال: مشتق تابع زیر را در نقطه $t=1$ بیابید

$$h(t) = (\cos(2 + \ln t), 2 + \ln t, (2 + \ln t)^4)$$

حل:

$$h'(t) = \left(-\frac{1}{t} \sin(2 + \ln t), \frac{1}{t}, 4 \frac{1}{t} (2 + \ln t)^3\right)$$

$$h'(1) = (-\sin 2, 1, 32)$$

تعریف خم هموار: $n = 2 \text{ or } 3$ $f : [a, b] \rightarrow R^n$

• تابع فوق را روی دامنه اش هموار گویند

اگر به ازای هر $t \in [a, b]$ ، $f'(t)$ وجود

داشته و پیوسته باشد و $|f'(t)| \neq 0 : \forall t$

• بنابر این خم f همیشه روی (a, b) هموار

است اگر و تنها اگر در هر نقطه $t \in [a, b]$

مشتق یکی از مؤلفه های آن غیر صفر

باشد.

مثال: آیا خم زیر در بازه [۱ و -۱] هموار است.

$$f(t) = (|t|, \ln(1+t), 1+t^2)$$

حل: تابع فوق روی بازه داده شده هموار نیست زیرا در نقطه صفر مؤلفه اول آن مشتق پذیر نیست

تعریف خم پاره هموار:

$$f : [a, b] \rightarrow R^n \quad n = 2 \text{ or } 3$$

- خم فوق را پاره هموار نامند اگر در تعداد متناهی نقطه از دامنه هموار نباشد.
- به عبارت دیگر خم f پاره هموار است اگر نقطه های $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$ وجود داشته باشند بطوری که f در این نقطه ها یا مشتق نداشته باشد یا در شرط $|f'(t)| = 0$ صدق کند ولی در بقیه نقاط $[a, b]$ در شرط $|f'(t)| \neq 0$ صدق کند.

مثال: خم $f(t) = (t^2, t^2, t^4)$ در نقطه $t=0$

هموار نیست، زیرا: $|f'(0)| = 0$

• **تعریف طول خم:** فرض کنید:

$f : [a, b] \rightarrow R^n \quad n = 2 \text{ or } 3$:

خمي هموار باشد، طول اين خم را با s

نشان ميدهند و با رابطه زير تعريف

مکنند:

$$s = \int_a^b |f'(t)| dt$$

تعمیم تعریف طول خم: اگر f در نقاط زیر

پاره هموار باشد $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$

و $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq b$ طول f را با رابطه زیر تعریف میکنند:

$$s = \int_a^{t_1} |f'(t)| dt + \int_{t_1}^{t_2} |f'(t)| dt + \dots + \int_{t_n}^b |f'(t)| dt$$

با قرار دادن $a = t_0, b = t_{n+1}$ این فرمول بصورت زیر در میآید:

$$s = \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |f'(t)| dt$$

مثال: اگر خم ذیل در بازه داده شده هموار است طول خم را پیدا کنید.

$$f(t) = (t^3, t^2), t \in [1, 3]$$

حل:

هموار است  $f'(t) = (3t^2, 2t) \neq 0$

$$|f'(t)| = \sqrt{9t^4 + 4t^2} = t\sqrt{9t^2 + 4} \Rightarrow s = \int_1^3 t\sqrt{9t^2 + 4}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{18} (9t^2 + 4)^{3/2} \Big|_1^3 = \frac{1}{27} (85^{3/2} - 13^{3/2})$$

توابع چند متغیری

تعريف توابع اسکالر:

$$F : A \rightarrow B$$

$$A \subseteq \underline{R^2}$$

$$B \subseteq \underline{R}$$

مثال تابع دو متغیره اسکالر:

$$F(x, y) = x + y + z \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$F(1, 0) = 1 + 0 + 2 = 3$$

اعمال جبری مانند توابع حقیقی است

تعریف توابع برداری:

$$F : A \rightarrow B$$

$$A \subseteq \underline{\underline{R^n}}$$

$$B \subseteq \underline{\underline{R^m}}$$

بنابراین تابع اسکالر حالت خاص تابع برداری است

مثالی از تابع برداری :

$$f : t \rightarrow (\cos t, \sin t) \quad t \in \mathbb{R}$$

$$t=0 \quad f(0) = (1, 0)$$

$$\text{یا} \quad f(x, y, z) = (x + y, z)$$

تعریف: در تابع برداری زیر

$$\mathbf{f} : X \rightarrow (\mathbf{f}_1(X), \dots, \mathbf{f}_m(X)), \quad X \in A \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{f}_i : A \rightarrow \mathbb{R} \quad i=1,2,3,\dots,m$$

توابع اسکالر \mathbf{f}_i را توابع مولفه ای و یا مولفه های تابع برداری \mathbf{f} می نامیم .

مثال :

$$f(x, y, z) \rightarrow (x + y + z, xy + yy + yx + xyz)$$

$$f_1(x, y, y) \rightarrow x + y + z$$

$$f_2(x, y, y) \rightarrow xy + yz + zx$$

$$f_3(x, y, y) \rightarrow xyz$$

تعریف : در تابع برداری

$$f : X \rightarrow (f_1(x), \dots, f_m(x)) \quad X \in A \subseteq \mathbb{R}^n$$

با انتخاب متغیرهای وابسته u_m, \dots, u_1

معادلات $u_m = f_m(x), \dots, u_1 = f_1(x)$ را

معادلات تابع برداری f می نامیم .

اعمال جبری مانند بردارهاست

تعریف : در تابع چند متغیره

$$f : X \rightarrow (f_1(X), \dots, f_m(X)) \quad ,$$

$$X \sim (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subseteq R^n$$

$$(1) \text{ اگر } f(B) = \{y \in R^m \mid f(X) = y, X \in B\} \quad B \subseteq A$$

را تصویر مجموعه B تحت f می نامند .

(2) مجموعه زیر را نمودار تابع f می نامند :

$$\{Z \mid Z \sim (X, f(X)) = (x_1, \dots, x_n, f_1(x), \dots, f_m(x))\} = GRF$$

(۳) نقطه $y_0 \in f(A)$ را در نظر می‌گیریم، مجموعه

$$\underline{E} = \{X \in A \mid f(X) = y_0\}$$

را مجموعه تراز تابع f

به ازاء y_0 نامند. که اگر تابع f اسکالر دو متغیره باشد

مجموعه های تراز را منحنی های تراز این تابع و اگر f

اسکالرسه متغیره باشد مجموعه های تراز را سطوح تراز

نامند.

مثال ۱: $f: t \rightarrow (2t+1, -t) \quad t \in \mathbb{R}$

تصویر فاصله $[-1/2, 0]$ تحت f : $A = f\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right)$

$= \left\{ (x, y) \mid x = 2t + 1, y = -t, t \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \right\}$

$A = f\left(\left[-\frac{1}{2}, 0\right]\right) = \left\{ (x, y) \mid y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, x \in [0, 1] \right\}$

$$GRF = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) = (t, f(t)), t \in R\}$$

$$= \{(x, y, z) \mid (x, y, z) = (t, 2t + 1, -t), t \in R\}$$

$$= \{(x, y, z) \mid x = t, y = 2t + 1, z = -t, t \in R\}$$

که معادلات پارامتری خطی است که از نقطه $(0, 1, 0)$ می‌گذرد و با بردار $u \sim (1, 2, -1)$ موازی است.

مثال ۲ :

تابع برداری سه متغیره زیر و نقطه $(1,2) \in \mathbb{R}^2$ را در

نظر می گیریم ، مجموعه تراز تابع f به ازاء نقطه (۱ و ۲)

را بدست آورید .

$$f : (x, y, z) \rightarrow \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}, z \right)$$

$$A = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = (1, 2)\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \mid \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4}, z \right) = (1, 2) \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1, z = 2 \right\}$$

$$\Rightarrow A = \left\{ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1 \right\}$$

بیضی واقع در
Z = 2 صفحه

تعریف همسایگی :

$$N(a, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| < r \right\}$$

شعاع : r مرکز : a

(۱) اگر $a \in \mathbb{R}^2$ باشد همسایگی را قرص به مرکز a گویند .

(۲) و اگر $a \in \mathbb{R}^3$ باشد همسایگی را یک گوی گویند .

(۳) همسایگی در \mathbb{R}^n تعبیر هندسی ندارد .

تعریف فاصله :

فاصله نقطه x از a عبارت است از :

$$|x - a| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

مثال :

قرص $N((0,0),2)$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} N((0,0),2) &= \left\{ (x,y) \in R^2 \mid \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < 2 \right\} \\ &= \left\{ (x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 4 \right\} \end{aligned}$$

مثال :

نشان می دهیم که در هر همسایگی میتوان یک همسایگی کوچکتر محاط کرد . یعنی :

$$\forall x \in N(x_0, r) : \exists \delta > 0 \quad N(x, \delta) \subseteq N(x_0, r)$$

حل : فرض $x \in N(x_0, r) \Rightarrow |x - x_0| < r$

فرض $0 \leq \delta = r - |x - x_0| < r$

حال برای اثبات y دلخواه را در نظر می گیریم:

$$y \in N(x_0, r) \Rightarrow |y - x_0| < r$$

بر اساس نامساوی مثلث



$$|y - x_0| = |(y - x) + (x - x_0)| \leq$$

$$|y - x| + |x - x_0| < \delta + |x - x_0| = r$$

$$\Rightarrow y \in N(x_0, r)$$

$$\Rightarrow N(x, \delta) \subseteq N(x_0, r)$$

تعریف مجموعه باز :

فرض کنیم $U \subseteq \mathbb{R}^n$ آنگاه U را یک مجموعه باز

در \mathbb{R}^n می نامیم هرگاه :

$$\forall x \in U : \exists r > 0 : N(x, r) \subseteq U$$

مثال :

یک زیرمجموعه باز $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \}$

از \mathbb{R}^2 است: زیرا

$\forall (x, y) \in A \quad \exists r > 0 : N((x, y), r) \subseteq A$ ؟

فرض $(x, y) \in A \Rightarrow x > 0 \xrightarrow{\text{فرض}} r = x$

برای اثبات داریم: $(x_1, y_1) \in N((x, y), r) \stackrel{?}{\Rightarrow} x_1 > 0$

$$|x_1 - x| = \sqrt{|x_1 - x|} \leq$$

$$\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x$$

$$\Rightarrow -x < x_1 - x < x$$

$$\Rightarrow 0 < x_1 < 2x \quad \text{و حکم ثابت است .}$$

تعریف مجموعه بسته :

$F \subseteq \mathbb{R}^n$ را بسته گوئیم هرگاه F^c (متمم F)

در \mathbb{R}^n باز باشد .

در \mathbf{R}^C بسته $V = \{(x, y) \mid x \leq 0, y \geq 0\}$

است. زیرا

$$V^c = \{(x, y) \mid x > 0, y < 0\}$$

تعریف مجموعه کراندار :

$S \subseteq \mathbb{R}^2$ را کراندار گویند اگر S زیرمجموعه ای از یک قرص باشد . عبارت دیگر :

اگر: S کراندار است $\exists M > 0 : S \subset D_M(0,0)$

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ را کراندار گویند اگر S زیرمجموعه ای از یک گوی باشد . عبارت دیگر :

اگر: S کراندار است $\exists M > 0 : S \subset D_M(0,0,0)$

در غیراینصورت S را بی کران گویند .

یعنی خارج هر قرص به مرکز مبدأ نقطه ای

از S واقع است .

مثال :

$\{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 5\}$ کراندار است

زیرا مجموعه همه نقاط داخل دایره به شعاع $\sqrt{5}$

و مرکز (۱ و ۱) است. بنابراین کافی است قرصی

انتخاب شود که همه دایره را در برگیرد. یعنی

کافی است $M > \sqrt{5} + \sqrt{2}$ باشد.

تعریف مجموعه همبند :

هر دو نقطه x, y از آن را توسط یک خط شکسته

واقع در آن بهم وصل کرد .

مجموعه باز همبند را یک ناحیه گویند .

تعریف همسایگی محذوف یا بدون مرکز :

$a \in \mathbb{R}^n$, مفروض $N(a, r)$

$$N'(a, r) = N(a, r) - \{a\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x - a| < r \right\}$$

مثال : $N((1,0,1),2)$ در \mathbb{R}^3 باز است . زیرا :

فرض $X_0 \in N((1,0,1),2)$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : N(X_0, \delta) \subseteq N((1,0,1),2)$

فرض: اگر $\delta = 2 - |(1,0,1) - X_0|$

$$= 2 - \sqrt{(1-x_0)^2 + y_0^2 + (1-z_0)^2}$$

$$\Rightarrow 0 < \delta < 2$$

برای اثبات در نظر می گیریم : $X \in N(x_0, \delta)$

بنابر نامساوی مثلث



$$\begin{aligned} |X - (1,0,1)| &= |X - X_0 + X_0 - (1,0,1)| \\ &\leq |X - X_0| + |X_0 - (1,0,1)| < \delta + |X_0 - (1,0,1)| = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \in N((1,0,1), 2)$$

$$\Rightarrow N(X_0, \delta) \subseteq N((1,0,1), 2) \Rightarrow \text{باز است}$$

تعریف حد : در نظر می گیریم

تابع $F : A \rightarrow B$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$

فرض کنید A شامل یک همسایگی محذوف نقطه x_0 است

گوئیم F در نقطه x_0 دارای حد $L \in \mathbb{R}^m$ است اگر :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in N(x_0, \delta) : f(x) \in N(L, \varepsilon)$$

در این صورت می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

ویا :

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$0 < |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{L}| < \varepsilon$$

مثال :

نشان می دهیم حد تابع $F(x, y) \rightarrow x_0 : (x, y) \in \mathbf{R}^2$

در نقطه $X_0 \sim (x_0, y_0)$ برابر x_0 است .

$$|F(x, y) - x_0| = |x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$|(x, y) - (x_0, y_0)| = |X - X_0| < \varepsilon \Rightarrow \delta = \varepsilon$$

$$|X - X_0| < \delta \Rightarrow |F(X) - x_0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x,y) = y_0$$

و بطور کلی همان فرمول حد برای تابع n متغیره صحیح است .

$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = F(X_0)$$

مثال:

نشان می دهیم که تابع زیر در نقطه $X_0 \sim (0,0)$ حد ندارد.

$$F(x, y) \rightarrow \frac{x^2}{x^2 + y^2} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$



$$\lim_{X \rightarrow X_0} F(X) = L$$

فرض خلف:

بنابراین برای $\varepsilon = \varepsilon_0$ باید عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه :

$$0 < |\mathbf{X} - \mathbf{X}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{F}(\mathbf{X}) - \mathbf{L}| < \varepsilon_0$$

$$0 < |\mathbf{X}| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} - \mathbf{L} \right| < \varepsilon_0$$

حالا نقطه $\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$ را در نظر می‌گیریم چون

$$\left| \left(0, \frac{\delta}{2}\right) \right| = \left| \frac{\delta}{2} \right| < \delta, \quad F\left(0, \frac{\delta}{2}\right) = 0$$

داریم $|L| < \varepsilon_0$ **1**

حال اگر نقطه $\left(\frac{\delta}{2}, 0\right)$ را در نظر بگیریم چون

$$F\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) = 1, \quad \left| \left(\frac{\delta}{2}, 0\right) \right| < \delta$$

داریم $|1 - L| < \varepsilon_0$ **2**

$$\Rightarrow 1 = |L + 1 - L| \leq |L| + |1 - L|$$

$$< \varepsilon_0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0$$

حال اگر: $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$

$1 < 1 \Leftarrow$ که تناقض است بنابراین تابع حد ندارد.

حد در صورت وجود منحصر به فرد است .
کلیه فرمولهای حد توابع حقیقی در مورد توابع چند
متغیره نیز صادق است .
بنابراین اگر هر مولفه حد داشته باشد تابع حد دارد .

مثال :

$$F:(x,y,z) \rightarrow \left(x^2+y^2, xy, \frac{1}{x^2+y^2+z^2+1} \right)$$

$$X_0 \approx (1,0,2)$$

$$\lim f(x,y,z) = \left(1, 0, \frac{1}{6} \right)$$

$$(x,y,z) \rightarrow X_0$$

پیوستگی مثل توابع حقیقی ، اگر حد با مقدار تابع
برابر باشد پیوسته است و بطور کلی وقتی همه
مولفه های پیوسته باشند تابع پیوسته است .

نکاتی در مورد پیوستگی

تعریف: هر گاه f یک تابع دو متغیره بوده و نمودار f در نقطه (x_0, y_0) را چنین نمایش دهیم:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) &= \Delta f(x_0, y_0) = \\ &= D_1 f(x_0, y_0) \Delta x + D_2 f(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

بطوریکه: $\exists \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x)$, $\exists \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x)$

تعریف مشتق‌پذیری

اگر در تعریف قبل داشته باشیم:

$$(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0) \Rightarrow \varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$$

در این صورت f در (x_0, y_0) مشتق‌پذیر است.

قضیه: هر گاه تابع دو متغیره f در نقطه
ای مشتقپذیر باشد در آن نقطه پیوسته
است.

قضیه: اگر مشتقات جزئی تابع دو
متغیره بر قرص باز

موجود و در نقطه a پیوسته باشد
آنگاه f در آن نقطه مشتقپذیر است.

مثال:

$$f(x, y) = 3x - xy^2$$

$$D_1 = 3 - y^2, \quad D_2 = -2xy$$

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= 3\Delta x - y_0^2 \Delta x - 2x_0 y_0 \Delta y - 2y_0 \Delta x \Delta y - \\ &\quad - x_0 (\Delta y)^2 - \Delta x (\Delta y)^2 \end{aligned}$$

با استفاده از تعریف محاسبه میکنیم:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0, y_0) - D_1 f(x_0, y_0) \Delta x - D_2 f(x_0, y_0) \Delta y &= \\ &= \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

طرف چپ ۱ پس از خلاصه کردن:

$$= -x_0(\Delta y)^2 - 2y_0\Delta x\Delta y - \Delta x(\Delta y)^2$$

که باید به یکی از چهار طریق زیر

معادل طرف راست ۱ باشد. یعنی:

$$[-2y_0\Delta y - (\Delta y)^2]\Delta x + (-x_0\Delta y)\Delta y$$

$$(-2y_0\Delta y)\Delta x + (-\Delta x\Delta y - x_0\Delta y)\Delta y$$

$$(-(\Delta y)^2)\Delta x + (-y_0\Delta x - x_0\Delta y)\Delta y$$

$$0\Delta x + [-2y_0\Delta x - \Delta x\Delta y - x_0\Delta y]\Delta y$$

چون توابع $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ وجود دارند کافی

است در يك مورد نشان داده شود

که

$$(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0) \Rightarrow \varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0$$

بنابراین

$$\varepsilon_1 = -2y_0\Delta y - (\Delta y)^2, \quad \varepsilon_2 = -x_0\Delta y$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_1 = 0, \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \varepsilon_2 = 0$$

در نتیجه تابع مشتقپذیر بوده

و در نقطه (x_0, y_0)

پیوسته است.

مثال: در مورد پیوستگی تابع زیر

تحقیق کنید:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}$$

$$D_1 f = \frac{2xy^6}{(x^2 + y^4)^2} \Rightarrow x = my^2 \Rightarrow$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2xy^6}{(x^2 + y^4)^2} = \frac{4m}{(m^2 + 1)^2}$$

بنابر این حد ندارد و در نتیجه پیوسته نیست.

تمرین: نشان دهید تابع زیر پیوسته است

$$f(x, y, z) = \cosh(x^2 + y^2 + z^2) + e^{x^2 + y^2 + 1} + \sinh xyz$$

پیوسته

چون توابع هیپر بولیک و نمایی پیوسته و ترکیب توابع پیوسته، پیوسته است بنابراین این تابع f پیوسته است

تعریف مشتق جزئی :

اگر تابع اسکالر $A \subseteq \mathbb{R}^n : F: A \rightarrow B$ روی یک همسایگی نقطه

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A$ تعریف شده باشد در اینصورت رابطه زیر را در

صورت وجود مشتق جزئی F در نقطه \mathbf{x} نسبت به متغیر i ام نامند و با

$\frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ یا $F_{x_i}(\mathbf{x})$ یا $D_i F(\mathbf{x})$ نشان می دهند .

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, \dots, x_n)}{h}$$

$$h \rightarrow 0$$

مثال :

$$F:(x,y) \rightarrow x^2y + y^3$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 y + y^3 - (x^2 y + y^3)}{h} = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + 3y^2$$

مشتقات جزئی مراتب بالا تر

مثال :

$$F(x, y) \rightarrow xy + x^2y^3 \quad \frac{\partial f}{\partial x}(X) = y + 2xy^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(X) = x + 3x^2y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X) = 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1 + 6xy \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + 6xy$$

تساوی وقتی برقرار است که پیوسته باشد .

اگر مشتقات جزئی موجود و پیوسته باشند تا هر مرتبه ای گویند تابع از رده

C^n (n همان مرتبه) است .

مثال :

$$f : (x, y) \rightarrow (x^2 + xy, x^2y + y^2)$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x + y, 2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x, x^2 + 2y)$$

تمرین: مشتقات جزئی تابع زیر را

پیدا کنید:

$$f(\lambda, \mu) = \frac{\sin \lambda \mu}{1 + \lambda^2 + \mu^2}, \quad p = \left(1, \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\mu \cos \lambda \mu (1 + \lambda^2 + \mu^2) - 2\lambda \sin \lambda \mu}{(1 + \lambda^2 + \mu^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(p)}{\partial \lambda} = \frac{\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \times \left(2 + \frac{\pi^2}{9}\right) - 2 \sin \frac{\pi}{3}}{\left(2 + \frac{\pi^2}{9}\right)^2}$$



$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{\lambda \cos \lambda \mu (1 + \lambda^2 + \mu^2) - 2\mu \sin \lambda \mu}{(1 + \lambda^2 + \mu^2)^2}$$

$$\frac{\partial f(p)}{\partial \lambda} = \frac{\cos \frac{\pi}{3} \times \left(2 + \frac{\pi^2}{9}\right) - 2 \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3}}{\left(2 + \frac{\pi^2}{9}\right)^2}$$

تمرین: اگر تابع f دارای مشتقات جزئی


پیوسته باشد و $v=x-y, u=x+y, w=f(u, v)$

ثابت کنید:

$$\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

حل:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v} \right)$$


$$\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2$$

تمرین: مشتق جزئی تابع داده شده را در

نقطه داده شده پیدا کنید

$$w = \frac{xy}{z} \cos y^z, \quad p(1, \pi, \frac{1}{2})$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{y}{z} \cos y^z$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} (p) = 2\pi \cos \pi^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{x}{z} \cos y^z - xy^z \sin y^z$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} (p) = 2 \cos \pi^{1/2} - \pi^{1/2} \sin \pi^{1/2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2} \cos y^z - \frac{xy^{z+1} \operatorname{Ln} y}{z} \sin y^z$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} (p) = -4\pi \cos \pi^{1/2} - 2\pi^{3/2} \sin \pi^{1/2}$$

تعریف مشتق جهت دار :

با فرض: V بردار واحد, $x_0 \in A$, $f : A \rightarrow R$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} = D_v f(x_0)$$

در صورت وجود مشتق جهت دار f در نقطه x_0 و
در جهت V است .


مثال : $f : (x, y) \rightarrow 2xy^2 - 3x^2 + 5y$

در نقطه $x_0 = (1, 2)$

و در جهت بردار واحد $V = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right)$

داریم : $x_0 + hV = (1, 2) + \left(\frac{h}{\sqrt{2}}, \frac{-h}{\sqrt{2}} \right) =$

$\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{h}{\sqrt{2}} \right)$


$$f(x_0 + hv) - f(x_0) = 2\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)\left(2 - \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$- 3\left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + 5\left(2 - \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - 15 =$$

$$= \frac{h^3}{\sqrt{2}} - \frac{9}{2}h^2 - \frac{11}{\sqrt{2}}h$$



$$D_{\mathbf{v}} f(1,2) =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{\sqrt{2}} - \frac{9}{2}h^2 - \frac{11}{\sqrt{2}}h}{h} = -\frac{11}{\sqrt{2}}$$

تعریف مماس و قائم :

صفحه π در نقطه P بر رویه S مماس است

اگر π بر منحنی های واقع بر S و مار بر P

مماس باشد. بعبارت دیگر صفحه π در نقطه P

بر رویه S مماس است اگر شامل تمام خطوطی

باشد که در نقطه P به منحنی های واقع بر S

و مار بر P مماس باشد .

خطی که از P گذشته و بر صفحه مماس بر S در P

عمود باشد، خط عمود بر S در نقطه P نامیده می شود.

فرمول امتداد قائم بر صفحه مماس بر رویه $S \in R^3$

در نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$:

$$N = -f_1(x_0, y_0)i - f_2(x_0, y_0)j + k$$

معادله صفحه مماس بر رویه S در نقطه P :

$$\mp f_1(x_0, y_0)(x - x_0) \mp f_2(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \pm (z - z_0) = 0$$

معادله خط قائم بر رویه S در نقطه P :

$$\frac{x - x_0}{f_1(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_2(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

مثال :

$$Z = \cos \frac{\pi x}{2} \quad P(1,0,0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\pi \sin \frac{\pi x}{2}}{2} = -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

معادله صفحه مماس $-\frac{\pi}{2}(x-1) + 0(y) - (z) = 0$

معادله خط قائم $\frac{x-1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{z}{1}$

شرط وجود صفحه مماس :

اگر تابع $z = f(x, y)$ روی مستطیل باز زیر پیوسته باشد

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| < h, |y - y_0| < k\}$$

و مشتقات جزئی آن روی R وجود داشته و در نقطه (x_0, y_0)

پیوسته باشد، (شرایط قضیه نمو) آنگاه تابع خطی L که نمودار

آن صفحه مماس بر رویه Z در نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ است

وجود دارد. که نمودار آن صفحه مماس رویه است.

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_1(x_0, y_0)(x - x_0) + f_2(x_0, y_0)(y - y_0)$$

قاعده زنجیره ای :

$$g:R^2 \rightarrow R \quad , \quad x=x(t) \quad , \quad y=y(t)$$

اگر g دارای مشتقات جزئی روی همسایگی از نقطه (x_0, y_0) بوده و در این

نقطه پیوسته باشند و توابع x و y در نقطه $t=t_0$ مشتقپذیر آنگاه با فرض

$$G(t) = g(x(t), y(t)) \quad \text{تابع مرکب} \quad (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$$

در نقطه t_0 مشتقپذیر است و داریم :

$$\frac{dg}{dt} \Big|_{t=t_0} =$$

$$g(x(t_0), y(t_0)), x'(t_0) + g(x(t_0), y(t_0)), y'(t_0)$$

$$= g_1(x_0, y_0) x'(t_0) + g_2(x_0, y_0) y'(t_0)$$

$$= g_1 x' + g_2 y'$$

مثال:

$$T = \ln(xyzt) , x = \sin u , y = \cos u , z = e^u , t = e^{-u}$$

$$\frac{dT}{du} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial u}$$

$$= \frac{1}{x} \cos u - \frac{1}{y} \sin u + \frac{1}{z} e^u - \frac{1}{t} e^{-u} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} + 1 - 1$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{\cos 2u}{\frac{1}{2} \sin 2u} = 2 \cot 2u$$

مشتق گیری ضمنی :

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_1(x, y, z)}{F_3(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_2}{F_3}$$

$$F_3 \neq 0$$

فرمول تقریب :

بشرط Δx و Δy بحد کافی کوچک

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx$$

$$f(x_0, y_0) + f_1(x_0, y_0)\Delta x + f_2(x_0, y_0)\Delta y$$

مثال : معادله صفحه مماس بر $xy+yz+zx=0$ را در نقطه $(2,2,1)$ پیدا کنید .

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y+z}{y+x} = -\frac{3}{4} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x+z}{y+x} = -\frac{3}{4}$$

$$z - z_0 = \frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0)$$

$$z - 1 = -\frac{3}{4}(x - 2) - \frac{3}{4}(y - 2)$$

تعریف گرادیان :

فرض کنیم تابع اسکالر n متغیره F روی مجموعه
 $A \subseteq R^n$ دارای تمام مشتقات جزئی مرتبه اول باشد

در اینصورت :

$$\nabla f = \text{grad} f :$$

$$x \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right)$$

$$, X \in A$$

مثال:

$$f : (x, y, z) \rightarrow 2x^2y + yz$$

$$\nabla f = (4xy, 2x^2 + z, y)$$

$$\nabla f(1, 1, 2) = (4, 4, 1)$$

قاعده زنجیره ای : (برداری و اسکالر)

$$g : B \rightarrow R , f : A \rightarrow B$$

$$A \subseteq R^n , B \subseteq R^m$$

g, f روی قلمروشان دارای مشتقات جزئی پیوسته اند .

در اینصورت داریم :

$$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(X) = \nabla g(f(X)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(X)$$

مثال :

$$f : (x, y) \rightarrow (x + y, xy)$$

$$g : (x, y) \rightarrow x^2 + y^2$$

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$$

$$\Rightarrow \nabla g(f(x, y)) = (2(x + y), 2xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (1, 2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(x, y) = 2(x + y) + 2x^2 y$$

حل مثال فوق از روش معمولی :

$$g \circ f(x, y) = g(f(x, y)) = g(x + y, xy)$$

$$= (x + y)^2 + x^2 y^2$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x}(x, y) = 2(x + y) + 2xy^2$$

که همان است .

قضیه :

رابطه بین مشتق جهت دار و گرادیان :

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{X}_0) = \mathbf{V} \cdot \nabla f(\mathbf{X}_0)$$

مثال :

مشتق جهت دار تابع روبرو را در نقطه $X_0 \sim (3, -1, -2)$

و در جهت بردار $V = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)$ بدست آورید :

$$f : (x, y, z) \rightarrow 2x^2y + yz$$

$$\nabla f = (-12, 16, -1)$$

$$D_{\mathbf{v}} f = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right) \cdot (-12, 16, -1) = \frac{18}{17}$$

تمرین: مشتق سوئی تابع داده شده را در نقطه و سوی تعیین شده پیدا کنید:

$$f(x, y) = x \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad x = (1, 1), \quad A = 2i - j$$

$$\nabla f = \left(\tan^{-1} \frac{y}{x} + x \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right)$$

$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, -1)$$

$$D_u f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot u =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}} (2, -1) \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\pi}{2} - 1 - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{\pi}{2} - 2 \right)$$

تمرین: مشتق سوئی تابع داده شده
را در نقطه و سوی تعیین شده پیدا
کنید:

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, \quad p(6, 6), \quad v = 3i + 4j$$

حل:

$$\nabla f = \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}, -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\nabla f(p) = (0, 0), \quad u = \frac{1}{5}(3i + 4j)$$

$$D_u f(p) = 0$$

تمرین: معادله صفحه مماس و خط قائم

بر رویه داده شده را در نقطه داده شده
پیدا کنید:

$$x^2z - xy^2 - yz^2 = 8 \quad , \quad p = (0, -2, 3)$$

$$\nabla = (2xz - y^2, -2xy - z^2, x^2 - 2yz)$$

$$\nabla(p) = (-4, -9, 12)$$

$$-4(x - 0) - 9(y + 2) + 12(z - 3) = 0$$

$$\frac{x}{-4} = \frac{y + 2}{-9} = \frac{z - 3}{12}$$

یادآوری بسط تیلور توابع یک متغیره :

اگر مشتقات مراتب مختلف تابع یک متغیره حقیقی f در

همسایگی $(a-h, a+h)$ موجود باشند آنگاه

$$x \in (a-h, a+h)$$

و داریم :

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \dots +$$

$$\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(\xi)$$

ξ بین a و x وجود دارد که

$$\frac{(x-a)^n}{n!} f^n(\xi)$$

باقیمانده مرتبه n ام f در نقطه a :

خواهیم داشت :

در فرمول فوق اگر باقیمانده نوشته نشود آن را چند جمله ای تیلور گویند

قضیه :

فرض کنیم f در همسایگی N از نقطه (a,b) دارای

مشتقات جزئی مرتبه سوم پیوسته باشد. در این صورت :

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall (x,y) \in N : \exists (\xi, n) \in (x,y), (a,b) \quad \text{خط واصل}$$



$$f(x, y) = f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + R_1(x, y, a, b, \xi, n)$$

بسط تیلور مرتبه اول تابع f حول نقطه (a, b) با باقیمانده R است.

$$: f(x, y) =$$

$$f(a, b) + (x - a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[(x - a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2(x - a)(y - b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + \right.$$

$$\left. (y - b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right] + R_2(x, y, a, b, \xi, \eta)$$

که بسط تیلور مرتبه دوم تابع f حول نقطه (a, b) با باقیمانده R است.

مثال :

بسط تیلور مرتبه دوم تابع $f(x,y)=2x^2-xy-y^2$ را در

نقطه $(a,b)=(0,0)$ محاسبه کنید .

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x-y=0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=-x-2y=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=-1 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2$$

$$\Rightarrow f(x,y)=0+0+0+\frac{1}{2}\left[x^2+4+2xy(-1)+y^2(-2)\right]+R_2$$

تمرین: بسط تیلور مرتبه دوم تابع زیر
را در نقطه داده شده پیدا کنید

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$$

حل: $(a, b) = (2, 5)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y - 3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2, 5) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x - 6y + 7 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2, 5) = -25$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

$$f(2,5) = -76$$

$$f(x, y) = -76 + 0(x - 2) - 25(y - 5) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(4(x - 2)^2 - 2(x - 2)(y - 5) - 6(y - 5)^2 \right)$$

تمرین: بسط تیلور مرتبه دوم تابع
زیر را در نقطه داده شده پیدا کنید

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 2y$$

$$(a, b) = (2, -1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(2, -1) = 0$$



$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 4y + 2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} (2, -1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

$$f(2, -1) = -4$$

$$f(x, y) = -4 + \frac{1}{2} \left[2(x-2)^2 + 2(x-2)(y+1) + 4(y+1)^2 \right]$$

تعریف مینیمم و ماکسیمم :

$$f: A \rightarrow B \quad : A \subseteq \mathbb{R}^n$$

(۱) $x_0 \in A$ را یک نقطه مینیمم نسبی f می نامیم هرگاه $\exists N(x_0, r) \subseteq A$

بطوریکه :

$$x \in N'(x_0, r) \Rightarrow f(x_0) < f(x)$$

در این صورت $f(x_0)$ یک مینیمم نسبی f است .

(۲) $x_0 \in A$ را یک نقطه ماکزیمم نسبی f می نامیم هرگاه $\exists N(x_0, r) \subseteq A$

بطوریکه

$$x \in N'(x_0, r) \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

در این صورت $f(x_0)$ را یک ماکزیمم نسبی f گویند .

(۳) $x_0 \in A$ را یک نقطه ماکزیمم مطلق f نامند هرگاه $\forall x \in A$

$$f(x) \leq f(x_0)$$

در اینصورت $f(x_0)$ را ماکزیمم مطلق f نامند.

(۴) $x_0 \in A$ را یک نقطه مینیمم مطلق f نامند هرگاه $\forall x \in A$

$$f(x_0) \leq f(x)$$

در اینصورت $f(x_0)$ را مینیمم مطلق f نامند.

مثال :

تابع $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$ را در نظر می گیریم :

$$f(0,0) = 2 > 2 - x^2 - y^2 = f(x,y)$$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ (0,0) نقطه ماکزیمم مطلق است .

$F(0,0)$ ماکزیمم مطلق و نسبی است .

مثال :

تابع $f(x,y) = (x-y+1)^2$ را در نظر می‌گیریم :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : f(x,y) \geq 0 \Rightarrow$$

چون مقدار تابع در هر نقطه خط $x-y+1=0$ برابر صفر است نقاط

روی خط فوق مینیمم مطلق f است .

قضیه :

$$f:A \rightarrow R, \quad A \subseteq R^n$$

اگر f روی $N(x_0, r)$ مشتق پذیر باشد و $x_0 \in N$ یک نقطه

ماکزیم یا مینیم نسبی f باشد . آنگاه

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) = (0, \dots, 0)$$

بعبارت دیگر :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0$$

تعریف نقطه بحرانی :

$x_0 \in \text{dom}f$ را یک نقطه بحرانی f گویند اگر در یکی

از دو شرط زیر صدق کند :

(الف) f در نقطه x_0 مشتق پذیر نباشد. (لا اقل یکی از

مشتقات جزئی موجود نباشد.)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) = 0 \end{array} \right.$$

(ب) f در x_0 مشتق پذیر و $\nabla f(x_0) = 0$

در نتیجه نقاط ماکزیمم و مینیمم یکی از نقاط بحرانی است یعنی جواب دستگاه زیر یک نقطه بحرانی یا

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) = 0 \end{array} \right. \text{ ماکزیمم و مینیمم است .}$$

در صورتیکه نقاط بحرانی ، ماکزیمم یا مینیمم نباشد آنرا نقطه زین اسبی گویند .

مثال :

نقاط بحرانی تابع زیر کدامند ؟

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2 - 3x + 2y$$

پاسخ:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0$$

$$\Rightarrow y = -1, x = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 4y + 2 = 0$$

نقاط بحرانی : (۱- و ۲)

قضیه : (آزمون مشتق دوم)

$$f: A \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$$

مفروض : $N(x_0), x_0 \in A$ همسایگی

فرض می کنیم f روی $N(x_0)$ از رده C^2 و x_0 یک نقطه

بحرانی f باشد در اینصورت :

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \quad , \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0)$$

$$C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0) \quad , \quad D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$

آنگاه :

- الف : اگر $D < 0$ نقطه x_0 نقطه زین اسبی است .
- ب: اگر $D > 0$ و $A > 0$ نقطه x_0 مینیمم نسبی است .
- ج: اگر $D > 0$ و $A < 0$ نقطه x_0 ماکزیمم نسبی است .
- د: اگر $D = 0$ نمی توان اظهار نظر کرد .

مثال :

نوع نقاط بحرانی تابع زیر را تعیین کنید .

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3xy + 15$$

پاسخ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{array}$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3 \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

ادامه جواب :

$$(0,0): A=0 \quad B=-3 \quad C=0$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow \text{زین اسبی}$$

$$(1,1): A=6 > 0 \quad B=-3 \quad C=6$$

$$D = AC - B^2 = 36 - 9 > 0 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی}$$

محاسبه ماکزیمم و مینیمم تحت شرایط خاص :

برای پیدا کردن نقطه ماکزیمم و مینیمم تابع f نسبت به شرط $g(x,y,z)=0$ باید دستگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \quad (g(x,y,z))=0$$

را نسبت به x و y و z و λ حل نمود و جواب نقطه (x,y,z) است .

مثال :

ماکزیم و مینیم فاصله مبدا را تا منحنی زیر پیدا کنید .

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$$

فرمول فاصله : $f = d = x^2 + y^2$ (زیرا نقاط واقع بر این دایره
بیشترین فاصله را دارند)

پاسخ:

$$\begin{cases} 2x = \lambda(10x + 6y) \\ 2y = \lambda(6x + 10y) \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow 4\lambda(y^2 - x^2) = 0 \Rightarrow y = \pm x$$

$$2x^2=1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow f=1$$

مینیم

نقاط ماکزیم و مینیم

$$x^2=2 \Rightarrow \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\right) \Rightarrow f=4$$

ماکزیم

تمرین: نشان دهید که ماکزیمم تابع

$f(x,y,z)=x+y+z$ روی کره زیر

عبارت است از $a\sqrt{3}$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$g : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

حل:



$$\nabla f = (1,1,1) \quad , \quad \nabla g = (2x,2y,2z)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = 2\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ z = \frac{1}{2\lambda} \\ \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = a^2 \end{array} \right.$$

$$3\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = a^2 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2a} \Rightarrow x = y = z = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = a\sqrt{3}$$

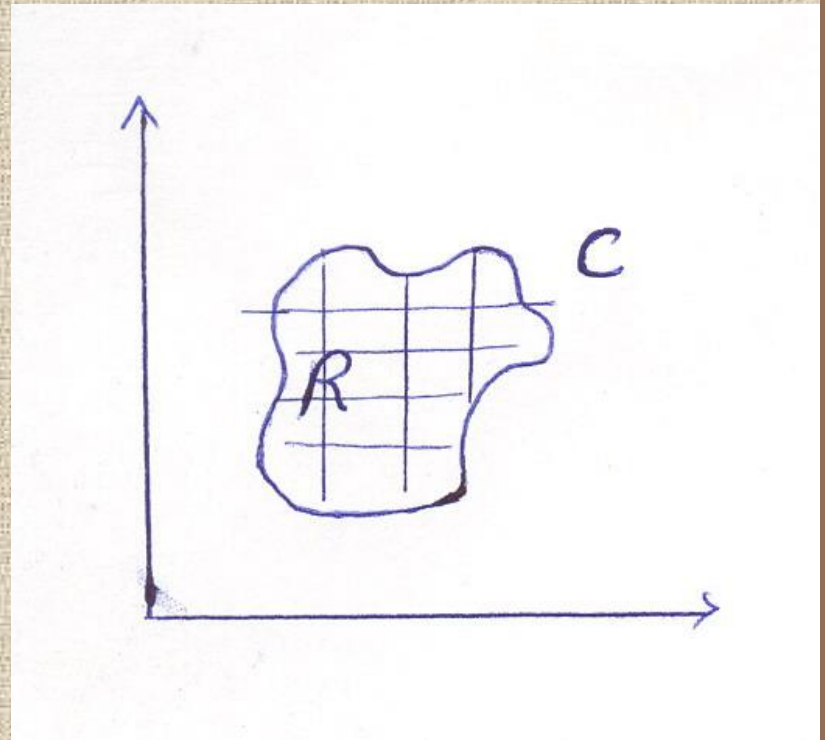
انتگرال دوپیل :

• میثم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

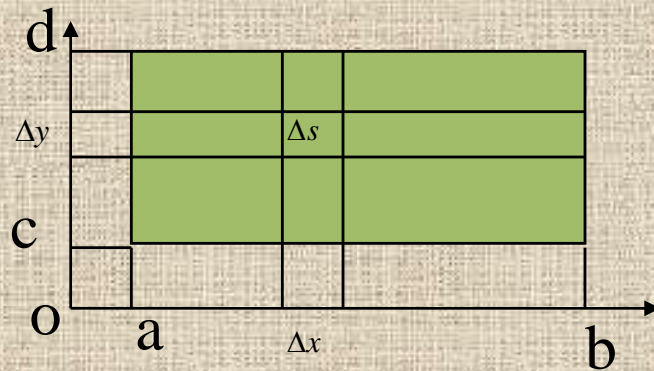
انتگرال در ناحیه R که توسط منحنی C محدود شده:

$$\iint_R f(x, y) dx dy$$



برای محاسبه ناحیه را به مستطیل های کوچک تقسیم
میکنیم و مشابه عملیات انتگرال معمولی مجموع مساحات
و حد آنها را حساب می نمائیم که به این ترتیب اگر ناحیه
 f به مستطیلی فرض شود که توسط خطوط $y=c$ و $y=d$
و $x=a$ و $x=b$ محدود شده خواهیم داشت :

حالت خاص:



$$\int_R f(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dx dy$$

$$= \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

اول محاسبه می شود

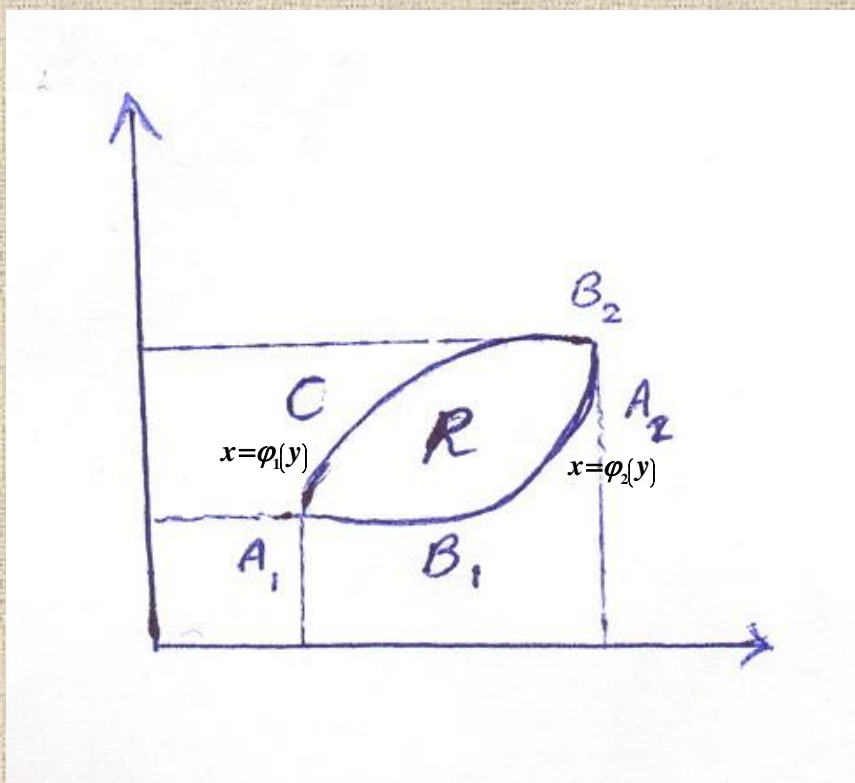
بعد

اول محاسبه می شود

بعد

در حالت کلی R مستطیل نبوده و ناحیه ای باشد که با منحنی C محدود شده باشد.

فرض کنید که B_1 و B_2 به ترتیب مینیمم و ماکزیمم منحنی را تشکیل داده و A_1 و A_2 کمترین و بیشترین مقادیر C روی محور افقی را تعیین می کنند.



را $x = \varphi_1(y)$ را معادله $B_1 A_1 B_2$ و $x = \varphi_2(y)$ را

معادله منحنی $B_1 A_2 B_2$ بگیرید. در اینصورت به جای

a و b مقادیر $\varphi_1(y)$ و $\varphi_2(y)$ و بجای c و d مقادیر

B_2 و B_1 قرار می گیرند. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\int_R f(x, y) dA = \int_{B_1}^{B_2} \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx dy$$

و بهمین ترتیب می توان نوشت :

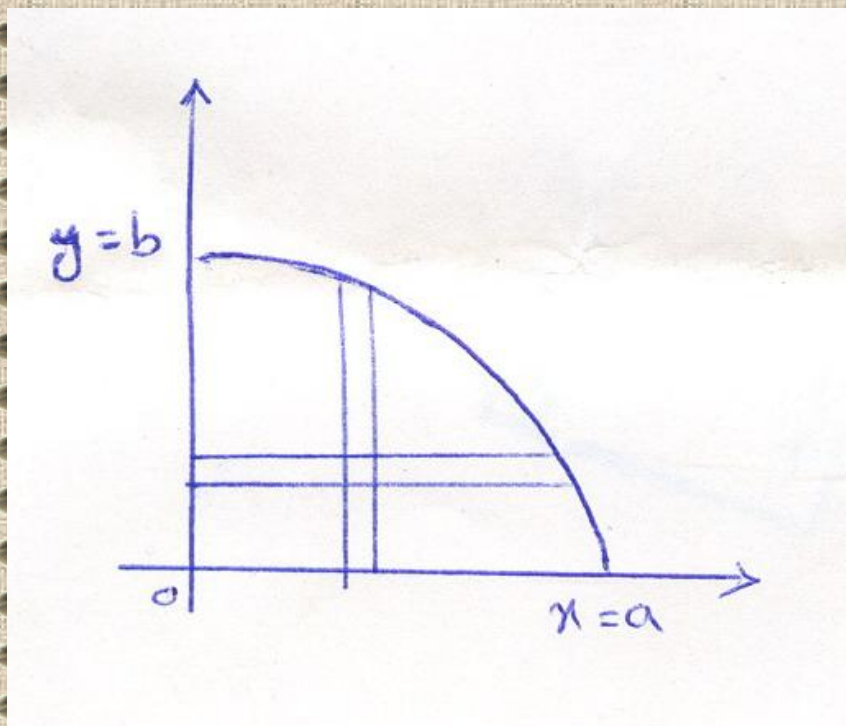
$$\int_R f(x, y) dA = \int_{a_1}^{a_2} \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx$$

مثال :

مقدار $I_1 = \int_R y dA$ را روی ناحیه محدود شده R که ربع

بیضی ای به معادله $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ است را محاسبه کنید .

پاسخ:



$$I_1 = \int_0^b \int_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} y dx dy$$

$$= \int_0^b \left[xy \Big|_{x=0}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}} \right] dy$$

$$= \frac{a}{b} \int_0^b y \sqrt{b^2 - y^2} dy$$

$$= -\frac{a}{3b} \left(b^2 - y^2 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^b$$

$$= \frac{ab^2}{3}$$

که با توجه به مطالب ریاضی ۱ همان مختص
 y مرکز ثقل ربع بیضی است و بهمین ترتیب

$$\frac{a^2 b}{3} = \int x dA$$

که مختص x مرکز

ثقل است .

چند مورد کاربرد

• میثم بزرگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

۱- ممان اینرسی :

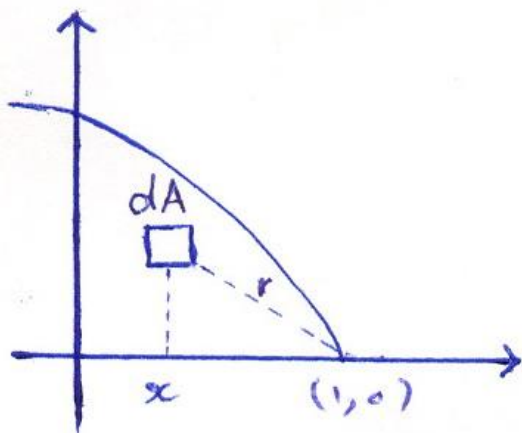
ممان اینرسی یک ذره حول یک محور مساویست با حاصلضرب جرم آن در مربع فاصله آن از محور .

برای محاسبه ممان اینرسی یک ناحیه مسطح حول محوری عمود بر آن از انتگرال دویل استفاده می کنیم.

مثال :

ممان اینرسی سطحی را که در ربع اول دستگاه مختصات قرار گرفته و توسط منحنی $y^2 = 1-x$ محدود شده حول محوری عمود بر سطح xy در $(1,0)$ را پیدا می‌نمائیم.

حل : فاصله هر نقطه دلخواه $p(x,y)$ از نقطه $(1,0)$ برابر است با :



$$f(x,y) = r = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$

$$M = \int_0^1 \int_0^{1-y^2} \left[(x-1)^2 + y^2 \right] dx dy$$

ادامه جواب :

$$= \int_0^1 \left[\frac{(x-1)^3}{3} + xy^2 \right]_0^{1-y^2} dy$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{y^6}{3} + y^2 - y^4 - \frac{1}{3} \right) dy$$

$$= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} y^7 + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{3} y \Big|_0^1 = \frac{44}{105}$$

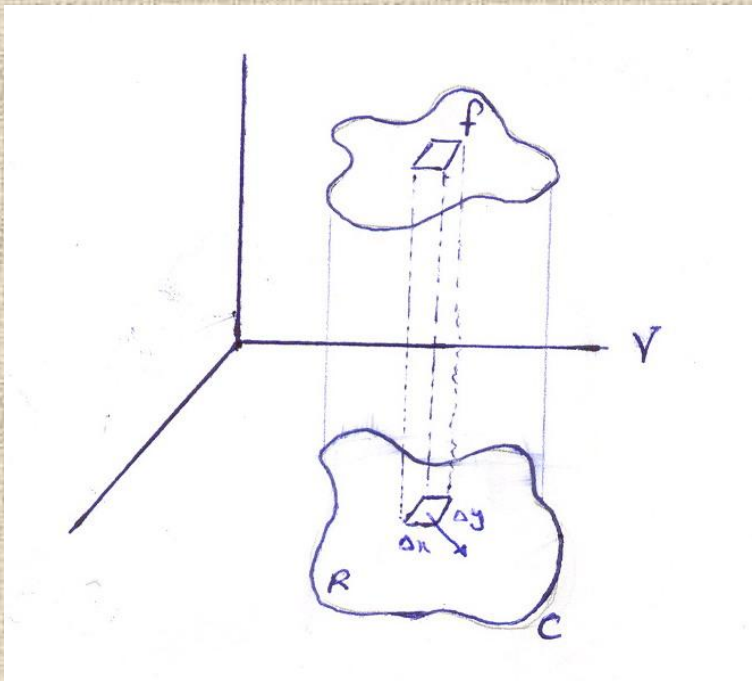
۲- محاسبه حجم :

اگر $z=f(x,y)$ معادله یک سطح (رویه) باشد که توسط منحنی

C بوجود آمده آنگاه حجم حادث از آن رویه و دو ناحیه

محدود شده بوسیله دو مقطع آن رویه توسط منحنی C بوسیله

انتگرال دویل محاسبه می شود .



$$V = \int_R f(x,y) dA$$

تذکر : (هرگاه $f(x,y)=1$ باشد انتگرال دوبل مساحت

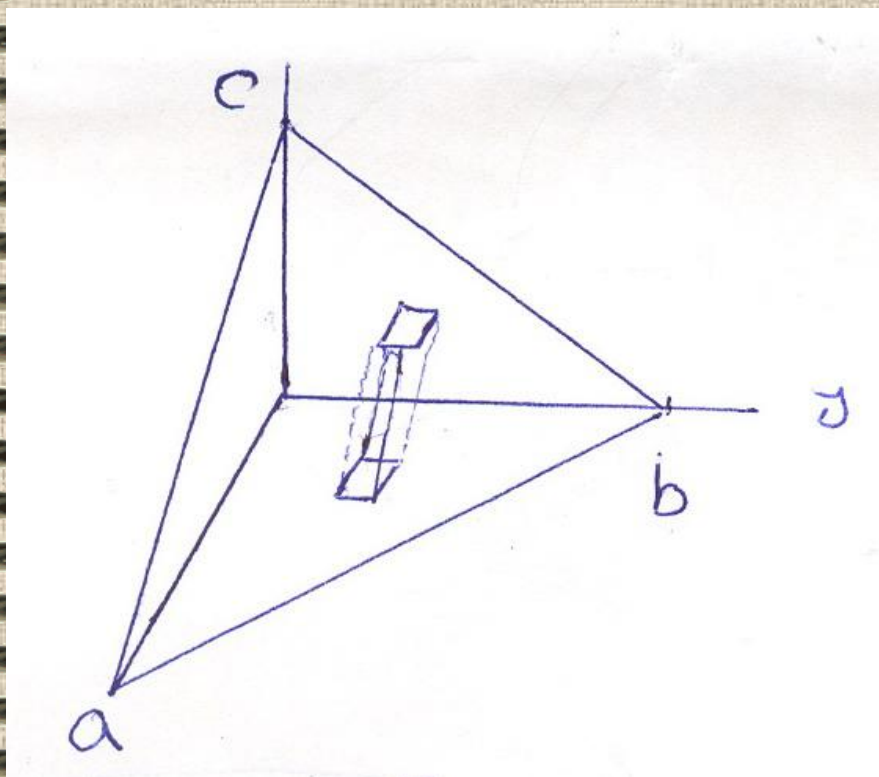
ناحیه R را بدست می دهد)

$$V = \int_R f(x,y) dA$$

مثال :

حجم یک چهار وجهی که توسط سطح $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ و سطوح

مختصات محدود شده را پیدا کنید :

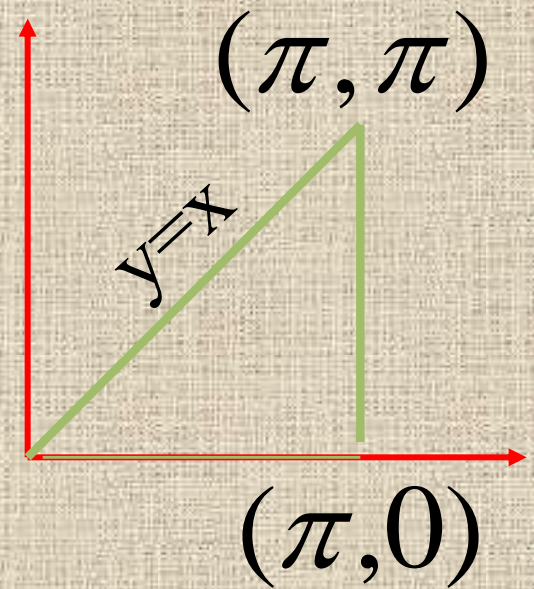


حل : $z = c \left(1 - \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \right)$

در صفحه xy منحنی C خط $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ است لذا خواهیم داشت :

تمرین: اگر D مثلثی به رئوس $(0,0)$ و $(\pi,0)$ و (π,π) باشد انتگرال زیر را روی D محاسبه کنید:

$$\iint_D x \cos(x+y) dA$$



$$\int_0^{\pi} \left[\int_0^x x \cos(x+y) dy \right] dx =$$

$$I = \int_0^{\pi} \left[x \sin(x+y) \right]_0^x dx = \int_0^{\pi} x \sin 2x dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x$$

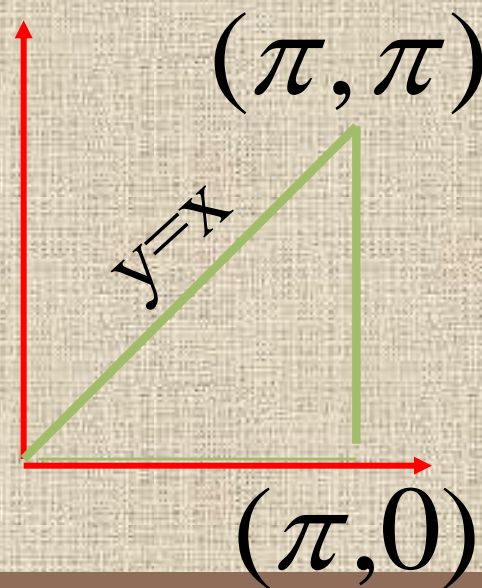
$$I = -\frac{1}{2} x \cos 2x + \int \frac{1}{2} \cos 2x dx \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2}$$

تمرین: مساحت ناحیه تمرین قبل
را به کمک انتگرال دوگانه محاسبه
کنید:

$$\int_0^{\pi} \left[\int_0^x dy \right] dx = \int_0^{\pi} y \Big|_0^x dx = \int_0^{\pi} x dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \pi^2$$



تمرین: اگر D دوزنقه ای به

رئوس

$$O=(0,0)$$

$$A=(1,0), B=(1,2), C=(0,1)$$

باشد انتگرال زیر را روی D

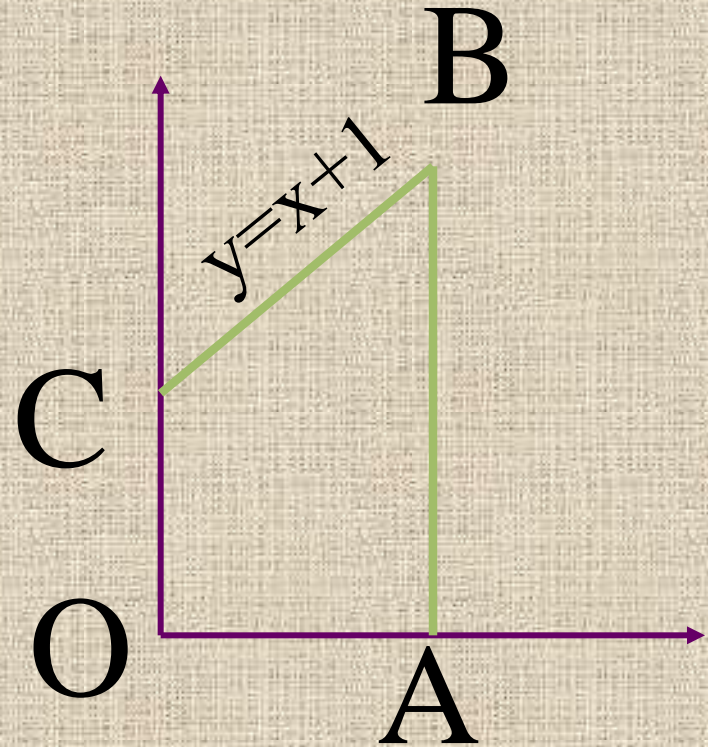
محاسبه کنید:

$$I = \iint_D (1+x) \sin y \, dx \, dy$$

حل:

$$BC : \frac{y-2}{x-1} = \frac{1-2}{0-1} = 1$$

$$y = x + 1$$



$$I = \int_0^1 \int_0^{x+1} (1+x) \sin y \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^1 \left. -(1+x) \cos y \right|_0^{x+1} =$$

$$= \int_0^1 (-(1+x) \cos(1+x) + (1+x) \cos 0) \, dx =$$

$$= \int_0^1 (-\cos(1+x) - x \cos(1+x) + 1+x) \, dx =$$

$$u = x \Rightarrow du = dx,$$

$$dv = \cos(1+x)dx \Rightarrow v = \sin(1+x)$$

$$I = \left(-\sin(1+x) - (x \sin(1+x)) \right)^1_{-1} =$$
$$- \int \sin(1+x)dx + x + \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 =$$

$$= -\sin 2 - \sin 2 - \cos 2 + 1 + \frac{1}{2} +$$

$$+ \sin 1 + 0 + \cos 1 - 0 - 0$$

تمرین: مساحت ناحیه تمرین قبل
را به کمک انتگرال دوگانه محاسبه
کنید:

$$A = \int_0^1 \int_0^{1+x} dy dx = \int_0^1 y \Big|_0^{1+x} dx =$$

$$= \int_0^1 (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

تمرین: انتگرال داده شده را روی

ناحیه D محاسبه کنید:

$$I = \iint_D e^{x+y} dA, D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$$

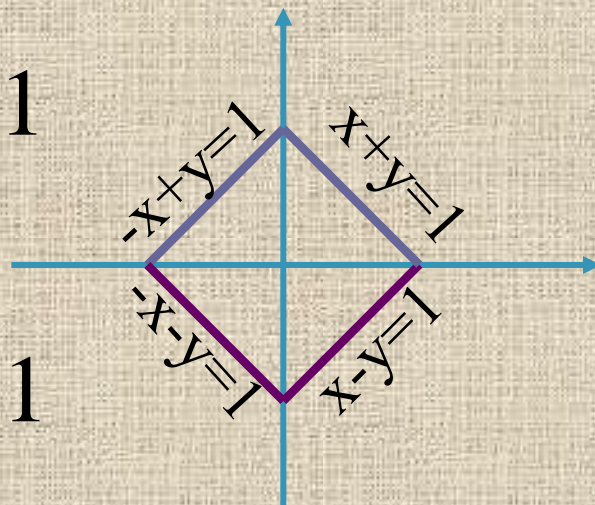
حل:

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y \leq 1$$

$$x < 0, y < 0 \Rightarrow -x - y \leq 1$$

$$x > 0, y < 0 \Rightarrow x - y \leq 1$$

$$x < 0, y > 0 \Rightarrow -x + y \leq 1$$



$$I = \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} e^{x+y} dx dy + \int_{-1}^0 \int_{-y-1}^{1+y} e^{x+y} dx dy =$$

$$= \int_0^1 e^{x+y} \Big|_{y-1}^{1-y} dy + \int_{-1}^0 e^{x+y} \Big|_{-y-1}^{1+y} dy =$$

$$= \int_0^1 (e^{1-y+y} - e^{y-1+y}) dy +$$

$$+ \int_{-1}^0 (e^{y+1+y} - e^{-y-1+y}) dy =$$



$$I = \int_0^1 (e - e^{2y-1}) dy + \int_{-1}^0 (e^{2y+1} - e^{-1}) dy =$$

$$= \left(ey - \frac{1}{2} e^{2y-1} \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{2} e^{2y+1} - e^{-1} y \right) \Big|_{-1}^0 =$$

$$= e - \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} e^{-1} + \frac{1}{2} e - \frac{1}{2} e^{-1} - e^{-1} = e - e^{-1}$$

تمرین: مساحت ناحیه تمرین قبل
را به کمک انتگرال دوگانه محاسبه
کنید:

$$A = \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} dx dy + \int_{-1}^0 \int_{-y-1}^{y+1} dx dy = 2$$

تمرین: انتگرال داده شده را روی

ناحیه D محصور بین دو هذلولی

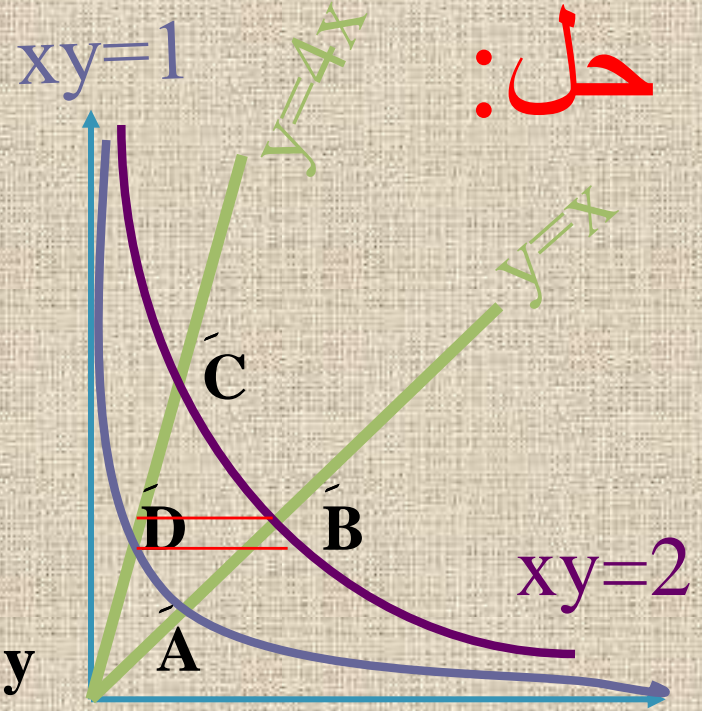
$xy=2$, $xy=1$ و خطوط $y=x$,

$y=4x$ واقع در ربع اول محاسبه

کنید:

$$I = \iint_D x^2 y^2 dx dy$$

حل:



$$A : \begin{cases} xy = 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 = y$$

$$B : \begin{cases} xy = 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} = y$$

$$C : \begin{cases} xy = 2 \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$$

$$D : \begin{cases} xy = 1 \\ y = 4x \end{cases} \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^2 \int_{\frac{1}{y}}^{\frac{2}{y}} x^2 y^2 dx dy + \int_2^{\sqrt{2}} \int_{\frac{y}{4}}^y x^2 y^2 dx dy + \\
 &+ \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \int_{\frac{y}{4}}^{\frac{2}{y}} x^2 y^2 dx dy = \int_1^2 \frac{1}{3} x^3 y^2 \Big|_{\frac{1}{y}}^{\frac{2}{y}} dy + \\
 &+ \int_2^{\sqrt{2}} \frac{1}{3} x^3 y^2 \Big|_{\frac{y}{4}}^y dy + \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{1}{3} x^3 y^2 \Big|_{\frac{y}{4}}^{\frac{2}{y}} dy =
 \end{aligned}$$

$$I = \int_1^2 \left(\frac{8}{3y} - \frac{1}{3y} \right) dy + \int_2^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{3} y^5 - \frac{1}{192} y^5 \right) dy$$

$$+ \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\frac{8}{3y} - \frac{1}{192} y^5 \right) dy = \int_1^2 \left(\frac{7}{3y} \right) dy +$$

$$+ \int_2^{\sqrt{2}} \frac{47}{48} y^5 dy + \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\frac{8}{3y} - \frac{1}{192} y^5 \right) dy =$$

$$= \frac{7}{3} \text{Lny} \Big|_1^2 + \frac{47}{48 \times 6} y^6 \Big|_2^{\sqrt{2}} + \frac{8}{3} \text{Lny} - \frac{1}{192 \times 6} y^6 \Big|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{7}{3} \text{Ln}y \Big|_1^2 + \frac{47}{48 \times 6} y^6 \Big|_2^{\sqrt{2}} + \frac{8}{3} \text{Ln}y - \frac{1}{192 \times 6} y^6 \Big|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} =$$

$$I = \frac{7}{3} \text{Ln}2 + \frac{47}{48 \times 6} 2^3 - \frac{47}{48 \times 6} 2^6 + \frac{8}{3} \text{Ln}2^{3/2} -$$

$$- \frac{1}{192 \times 6} 2^9 - \frac{8}{3} \text{Ln}2^{1/2} + \frac{1}{192 \times 6} 2^3 =$$

$$= \frac{7}{3} \text{Ln}2 + \frac{47}{36} - \frac{47}{9} + 4 \text{Ln}2 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \text{Ln}2 + \frac{1}{144} =$$

$$= 5 \text{Ln}2 - \frac{755}{144}$$

$$V = \int_0^b \int_0^{a(1-\frac{y}{b})} c \left(1 - \frac{y}{b} - \frac{x}{a} \right) dx dy$$

ادامه جواب :

$$= c \int_0^b \left(x - \frac{x^2}{2a} - \frac{xy}{b} \right) \Bigg|_0^{a(1-\frac{y}{b})} dy$$

$$= ac \int_0^b \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{b} + \frac{y^2}{2b^2} \right) dy$$

$$= ac \left(\frac{1}{2} y - \frac{y^2}{2b} + \frac{y^3}{6b^2} \right) \Bigg|_0^b = \frac{abc}{6}$$

نکته کاربردی ۱: اگر ناحیه
انتگرال گیری R نسبت به محور
 y ها متقارن و f روی x فرد باشد،
چون $f(-x, y) = -f(x, y)$ آنگاه:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = 0$$

مثال: (۱-۲-۱۴)

$$f(x, y) = 2xy$$

$$R: y = 2 - x^2, y = x^2$$

$$\iint_R 2xy dA = 0$$

ناحیه R بین دو منحنی محصور است.

نکته کاربرد ۲: اگر ناحیه

انتگرال گیری R نسبت به محور

y ها متقارن و f روی x زوج

باشد، چون $f(-x, y) = f(x, y)$

آنگاه:

$$\iint_R f(x, y) dx dy =$$

$$= 2 \iint_{\text{rightside}fR} f(x, y) dx dy$$

مثال: (۱-۲-۳۶)

مساحت دایره به شعاع r روی

ناحیه D : کافی است از تابع

$f(x,y)=1$ روی ناحیه و با توجه

به نکته بیان شده انتگرال دو گانه

بگیریم:

$$2 \int_{-r}^r \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} 1 dx dy = ?$$

$$s = 2 \int_{-r}^r \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} 1 dx dy = 2 \int_{-r}^r x \Big|_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} =$$

$$= 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$x = r \sin \theta \Rightarrow dx = r \cos \theta d\theta, \quad j = r$$

$$s = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2 \theta d\theta =$$

$$= r^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\theta) d\theta = \pi r^2$$

نکته کاربردی ۳: اگر ناحیه
انتگرال گیری R نسبت به محور
 x ها متقارن و f روی y فرد باشد،
چون $f(x, -y) = -f(x, y)$ آنگاه:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = 0$$

نکته کاربردي ۴: اگر ناحیه

انتگرال گیري R نسبت به محور

x ها متقارن و f روی y زوج

باشد، چون $f(x, -y) = f(x, y)$

آنگاه:

$$\iint_R f(x, y) dx dy =$$

$$= 2 \iint_{\text{upside of } R} f(x, y) dx dy$$

انتگرال تریپل (سه گانه)

• مینم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

انتگرال سه گانه :

مشابه انتگرال یک گانه و دو گانه تقسیمات جزئی حجمی را در نظر می گیریم و حجم ناحیه را محاسبه می کنیم (برای توابع سه متغیره)

$$\int_R f(x, y, z) dv =$$
$$= \int_{z_0}^{z_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, z) dx dy dz$$

که با جایگذاری مناسب مشابه انتگرال دوگانه می توان بشکل زیر فرمول را تبدیل کرد :

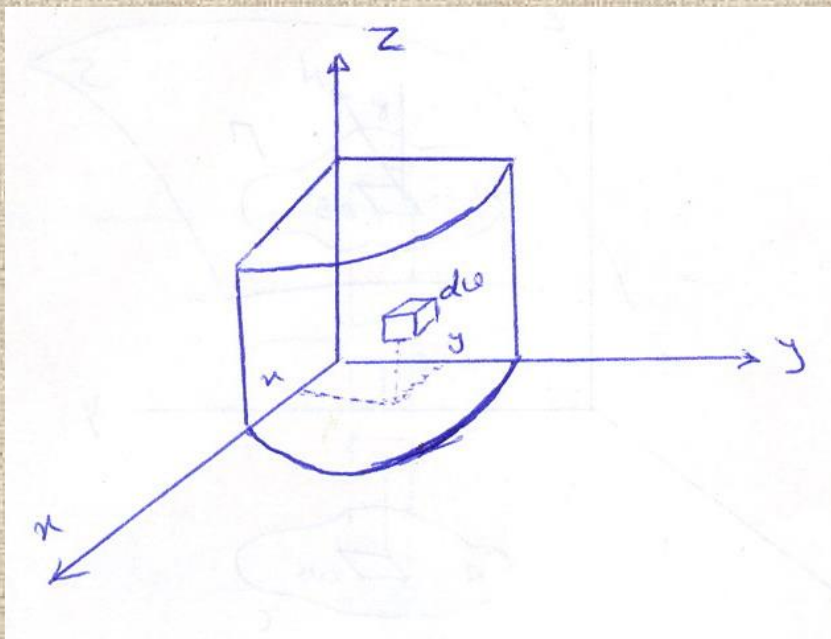
$$\int_R f(x, y, z) dv =$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \int_{f_1(z)}^{f_2(z)} \int_{\varphi_1(y, z)}^{\varphi_2(y, z)} f(x, y, z) dx dy dz$$

مثال :

ممان اینرسی I_x جسم جامدی را که با استوانه
 $x^2 + y^2 = a^2$ و سطوح $z=0$ و $z=b$ محصور شده
 حول محور x (مطابق شکل) تعیین می کنیم (با فرض

چگالی ثابت δ)



چون فاصله هر نقطه از محور x با فرمول زیر بدست می آید .

$$r^2 = f(x, y, z) = y^2 + z^2$$

پاسخ :

بنابراین خواهیم داشت :

$$I_x = \int_R \left(y^2 + z^2 \right) \delta \, dv$$

$$= 4\delta \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^b \left(y^2 + z^2 \right) dz dy dx$$

$$= 4\delta \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \left(by^2 + \frac{b^3}{3} \right) dy dx$$

$$= 4\delta \int_0^a \left(\frac{by^3}{3} + \frac{b^3y}{3} \right) \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

$$= \frac{4\delta b}{3} \int_0^a (a^2 + b^2 - x^2) \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

اگر در نظر بگیریم :

$$x = a \sin \theta \quad dx = a \cos \theta d\theta$$

$$x = a \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \quad x = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$= \frac{4\delta a^2 b}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 + b^2 - a^2 \sin^2 \theta) \cos^2 \theta d\theta$$

$$= \frac{4\delta a^2 b}{3} \left[(a^2 + b^2) \frac{\pi}{2} - \frac{a^2 \pi}{10} \right]$$

$$= \frac{6a^2 b \pi}{12} (3a^2 + 4b^2)$$

تعریف ژاکوبین :

فرض کنید $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ دو تابع دومتغیره

پیوسته باشند بطوریکه مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته

داشته باشند لذا

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \equiv \begin{matrix} \text{دترمینان تابعی} \\ \text{u و v نسبت} \\ \text{به x و y} \end{matrix}$$

$$\equiv J \left(\frac{u, v}{x, y} \right) \equiv \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

در مورد تابع سه متغیره ژاکوبین بطور مشابه چنین تعریف می شود :

$$u = u(x, y, z) \quad \text{فرض کنیم:}$$

$$v = v(x, y, z) \quad w = w(x, y, z)$$

$$J \left(\frac{u, v, w}{x, y, z} \right) \equiv \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \equiv$$

$\frac{\partial u}{\partial x}$	$\frac{\partial v}{\partial x}$	$\frac{\partial w}{\partial x}$
$\frac{\partial u}{\partial y}$	$\frac{\partial v}{\partial y}$	$\frac{\partial w}{\partial y}$
$\frac{\partial u}{\partial z}$	$\frac{\partial v}{\partial z}$	$\frac{\partial w}{\partial z}$

تعریف قبل بهمین ترتیب برای توابعی با بیش از سه متغیر نیز تعمیم می یابد .

از ژاکوبین برای تغییر متغیر انتگرالهای چندگانه استفاده می شود.

بدین ترتیب که اگر لازم شود در انتگرال $\int_R f(x, y) dA$

متغیر با قرار دادن $y = y(u, v), x = x(u, v)$

تغییر داده شود عبارت dA بر حسب جملات u و v بدین صورت

تغییر می کند :

$$dA = \left| J \left(\begin{array}{c} x, y \\ u, v \end{array} \right) \right| du dv$$

به عنوان مثال در تغییر متغیر به مختصات قطبی :

$$x = \rho \cos \theta \quad , \quad y = \rho \sin \theta$$

$$J \left(\begin{array}{c} x, y \\ \rho, \theta \end{array} \right) = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= \rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta = \rho$$

$$\Rightarrow dA = \rho \, d\rho \, d\theta$$

بنابراین بطور کلی داریم :

$$\int_R f(x, y) dA =$$

$$\iint_R f[x(u, v), y(u, v)] \left| J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) \right| du dv$$

$$= \iint_R F(u, v) du dv$$

و بطور مشابه نیز برای توابع سه متغیره محاسبه می شود .

تغییر متغیر

• میثم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

مثال :

انتگرال دوگانه زیر که در دستگاه دکارتی است را به دستگاه قطبی

تبدیل و سپس محاسبه می کنیم :

تغییر متغیر
به قطبی :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ y = r \sin \theta & 0 \leq r \leq a \end{cases}$$

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy dx$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2} r dr}_{-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a} d\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{3} d\theta = \frac{a^3 \theta}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^3 \pi}{3 \cdot 2} = \frac{\pi}{6} a^3$$

بهمین ترتیب تغییر متغیر (برای توابع سه متغیره)
به دستگاه مختصات استوانه ای بطور خلاصه چنین
می شود :

$$I(r, \theta, z) = r$$

و تغییر متغیر به دستگاه مختصات کروی برابر است
با :

$$I(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \sin \theta$$

مثال :

اگر جسمی باشد که در ناحیه اول مختصات قرار داشته باشد و توسط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ و صفحات مختصات محصور شده باشد.

(الف) $\iiint_S xyz \, dv$ را با استفاده از مختصات کروی
 (ب) با استفاده از مختصات استوانه ای پیدا کنید.

$$J = \iiint_S xyz dv =$$

حل قسمت الف :

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 (\rho \cos \theta \sin \varphi)(\rho \sin \theta \sin \varphi)$$

$$\cdot \rho \cos \varphi \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

$$= \frac{4^6}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin \theta \cos \theta \sin^3 \varphi \cos \varphi}_{\tan^2 \theta} d\theta d\varphi$$

$$\tan^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

ادامه قسمت الف:

$$= \frac{4^6}{6} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \cos \varphi \, d\varphi$$
$$= \frac{4^6}{48} = \frac{4^4}{3}$$

$$\iiint xyz \, dv =$$

دنباله حل مثال (قسمت ب):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} (r \cos \theta)(r \sin \theta) z r \, dz \, dr \, d\theta$$

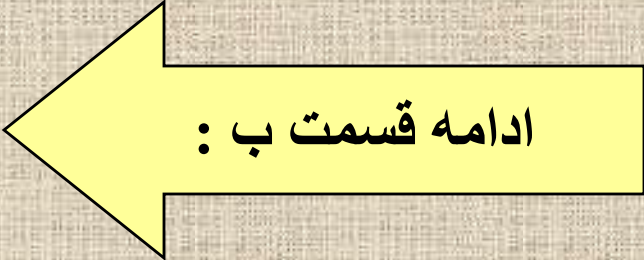
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{\sqrt{16-r^2}} r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr \, d\theta$$



ادامه قسمت ب :

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 (16 - r^2) r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{4} r^4 - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^4 \cos \theta d\theta$$



ادامه قسمت ب :

$$= \left(4^4 - \frac{4^6}{6} \right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(4^4 - \frac{4^6}{6} \right) = \frac{4^4}{3}$$

بنابراین از هر طریق جواب یکی است .

انتگرال خطی :

مقدمه: می دانیم حاصلضرب تغییر مکان و مولفه نیروی وارده در جهت تغییر مکان را کار انجام شده توسط این نیرو گویند .

بعبارت دیگر اگر \vec{F} نیرو و \vec{R} تغییر مکان باشد :

$$\vec{F} \cdot \vec{R} = \underbrace{\|F\| \|R\|}_{\text{مولفه F در امتداد تغییر مکان}} \cos \theta$$

مولفه F در امتداد تغییر مکان

فرض کنیم که C منحنی نمایش یک تابع برداری \vec{r} در فاصله (a,b) باشد و \vec{F} یک نیروی برداری باشد که در روی C تعریف شده باشد و $\vec{F} \cdot \vec{r}'$ در فاصله $[a,b]$ قابل انتگرال گیری باشد. در اینصورت کار انجام شده توسط نیروی F برای حرکت در آوردن یک ذره در امتداد C از $r(a)$ تا $r(b)$ عبارت است از :

$$w = \int_a^b \vec{F} [\vec{r}(t)] \cdot \vec{r}'(t) dt$$

مثال :

اگر نیروی $\vec{F}(x, y) = \sqrt{y} \vec{i} + (x - y)\vec{j}$

را داشته باشیم مقدار کار انجام شده توسط این نیرو را

برای حرکت در آوردن ذره ای در امتداد $y=x$ از $A(0,0)$

تا $B(1,1)$ را بدست آورید .

پاسخ :

$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = t \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

$$= t\vec{i} + t\vec{j} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$[x = t \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1]$$

$$\Rightarrow R'(t) = \vec{i} + \vec{j} \quad (1)$$



ادامه مثال :

$$F(R(t)) = \sqrt{t}\vec{i} + (t - t)\vec{j} = \sqrt{t}\vec{i}$$

$$W = \int_0^1 F(R(t)) \cdot R'(t) dt$$

$$W = \int_0^1 \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

انتگرال روی خم :

C عبارت از خم $(\varphi(t), \phi(t))$ $a \leq t \leq b$

انتگرال روی خم $f(x,y)$ در مسیر C :

$$\int_C f(x, y) ds$$

$$= \int_a^b f(\varphi(t), \phi(t)) \cdot \sqrt{(\varphi'(t))^2, (\phi'(t))^2} dt$$

مثال :

انتگرال روی خم روبرو را محاسبه کنید : $\int_C ye^{-x} ds$

که C عبارت است از خم زیر :

$$y = 2 \tan^{-1} t - t + 3$$

$$, (0 \leq t \leq 1) \quad x = \text{Ln} \left(1 + t^2 \right)$$

$$\int_C y e^{-x} ds$$

پاسخ :

$$= \int_0^1 \frac{2 \tan^{-1} t - t + 3}{1 + t^2} dt$$

$$\sqrt{\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2 \tan^{-1} t - t + 3}{1 + t^2} dt$$

ادامه پاسخ:

$$= 2 \int_0^1 \tan^{-1} t d(\tan^{-1} t) - \int_0^1 \frac{t}{1 + t^2} dt +$$

$$3 \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2}$$

ادامه پاسخ : ←

$$= 2 \left(\tan^{-1} t \right)^2 - \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(1 + t^2 \right)$$

$$+ 3 \tan^{-1} t \Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \operatorname{Ln} 2 + \frac{3\pi}{4}$$

مثال :

مطلوبست محاسبه انتگرال $I = \int_c xydx + (y - x)dy$

در مسیر خطهای زیر که دو نقطه $(0,0)$ و $(1,1)$ را بیکدیگر

وصل می کنند :

الف) خط $y=x$:

حل:

$$I = \int_0^1 \left[x^2 + (x - x)dx \right] = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ب) سهمی $y=x^2$:

حل:

$$I = \int_0^1 \left[x^3 + 2(x^2 - x)x \right] dx$$

$$= \int_0^1 (3x^3 - 2x^2) dx$$

$$= \frac{3}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

(ج) سهمی $y^2=x$:

$$I = \int_0^1 \left[x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \left(x^{\frac{1}{2}} - x \right) x^{-\frac{1}{2}} \right] dx$$

حل:

$$= \int_0^1 \left[x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \left(1 - x^{\frac{1}{2}} \right) \right] dx$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{17}{30}$$

دیفرانسیل کامل یا واقعی

• میثم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

یادآوری :

با فرض اینکه $f(x) = F'(x)$ باشد داریم :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$f(x)dx$ دیفرانسیل $F(x)$ است

بطور مشابه اگر $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ دو تابع دو متغیره باشند آنگاه در صورتیکه برای

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy \quad (۱)$$

تابعی مثل $F(x,y)$ وجود داشته باشد که

$$Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} F(x,y)$$

$$P(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F(x,y)$$

در این صورت رابطه (۱) را دیفرانسیل واقعی یا کامل $F(x,y)$ گویند و یا عبارت دیگر برای تابع $F(x,y)$ دیفرانسیل واقعی یا کامل چنین تعریف می شود :

$$dF = \frac{\partial}{\partial x} F dx + \frac{\partial}{\partial y} F dy$$

مثال 1 :

$$F(x, y) = xy$$

$$dF(x, y) = ydx + xdy$$

مثال ۲ :

$$F(x, y) = \frac{x}{y} \quad \text{با فرض } y \neq 0$$

$$\Rightarrow dF = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

قضیه :

شرط لازم و کافی برای آنکه $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

یک دیفرانسیل کامل باشد این است که

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

مثال ۳:

اگر $P(x,y)=y$ و $Q(x,y)=-x$ باشد آنوقت

$$\text{بنابراین } ydx - xdy \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

دیفرانسیل کاملی نیست .

مثال ۴ :

آیا عبارت روبرو دیفرانسیل کاملی است ؟

$$\left[(x + y + 1)e^x - e^y \right] dx + \left[e^x - (x + y + 1)e^y \right] dy$$

بله زیرا :

حل:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[(x + y + 1)e^x - e^y \right] = e^x - e^y$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[e^x - (x + y + 1)e^y \right] = e^x - e^y$$

میدانهای برداری کنسرواتیو
یا میدانهای برداری نگهدارنده :

اگر تابع اسکالر F بنحوی وجود داشته باشد که برای
بردار \vec{V} داشته باشیم $\nabla F = \vec{V}$ در اینصورت F را
پتانسیل یا (نگهدارنده) نامند .

در اینصورت \vec{V} را یک میدان برداری کنسرواتیو نامند
و داریم :

$$\nabla \times \vec{V} = \mathbf{0}$$

مثال :

ثابت کنید که عبارت زیرکنسرواتيو است و تابع پتانسيل آن را بدست آوريد .

$$\vec{V} = (x + 2y - z)\vec{i} + (2x - y + z)\vec{j} + (-x + y + 2z)\vec{k}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + 2y - z & 2x - y + z & -x + y + 2z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

حل :

\vec{V} یک میدان برداری کنسرواتیو است.

طبق تعریف : $\exists F \quad \nabla F = \vec{V} \Rightarrow$

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$

$$= V_1 \vec{i} + V_2 \vec{j} + V_3 \vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = V_1 = x + 2y - z$$



ادامه جواب :

$$\Rightarrow F(x, y, z) = \int (x, y, z) dx =$$

$$\frac{1}{2} x^2 + 2yx - zx + E(y, z) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 2x + E_y(y, z) = V_2 = 2x - y + z$$

$$\Rightarrow E(y, z) = -y + z$$

$$E(y, z) = \int (-y + z) dy$$



ادامه جواب :

$$= -\frac{1}{2}y^2 + yz + h(z) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow F(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - zx$$

$$+ yz - \frac{1}{2}y^2 + h(z) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = -x + y + h_z(z) = V_3$$

ادامه جواب :

$$,V_3 = -x + y + 2z \Rightarrow h_z(z) = 2z$$

$$h(z) = \int 2z dz = z^2 + c \quad (4)$$

$$3,4 \Rightarrow F(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + 2xy$$

$$-zx - \frac{1}{2}y^2 + z^2 + z + c$$

کرل (چرخه) چرخش

• میثم برزگر

MEYSAM4366@YAHOO.COM

تعریف کرل :

اگر تابع برداری \mathbf{u} در همه نقاط تعریف شده مشتق پذیر

باشد در اینصورت :

$$\mathit{curl} \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times \mathbf{u}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

مثال :

کرنل u را در نقطه $(1,1,1)$ محاسبه کنید :

$$\vec{u} = xyz\vec{i} + 2x^2yz\vec{j} + 2yz^2\vec{k}$$

حل :

$$\text{curl } u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & -zx^2yz & 2yz^2 \end{vmatrix} =$$



ادامه جواب :

$$= (2z^2 + 2x^2y)\vec{i} + xyj^3 - 4xyz - xz$$

$$\nabla \times u(1,1,1) = 4i + j - 5k$$

تعریف عملگر لاپلاسین:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

اگر $\nabla^2 u = 0$ در این صورت u را تابع هارمونیک گویند.

مثال :

لاپلاسين u را در نقطه $(1,0,1)$ محاسبه کنید .

$$u = 6x^2 y^2 z^2 + x^3$$

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= 12y^2 z^2 + 6x + 12x^2 z^2 + 12x^2 y^2$$

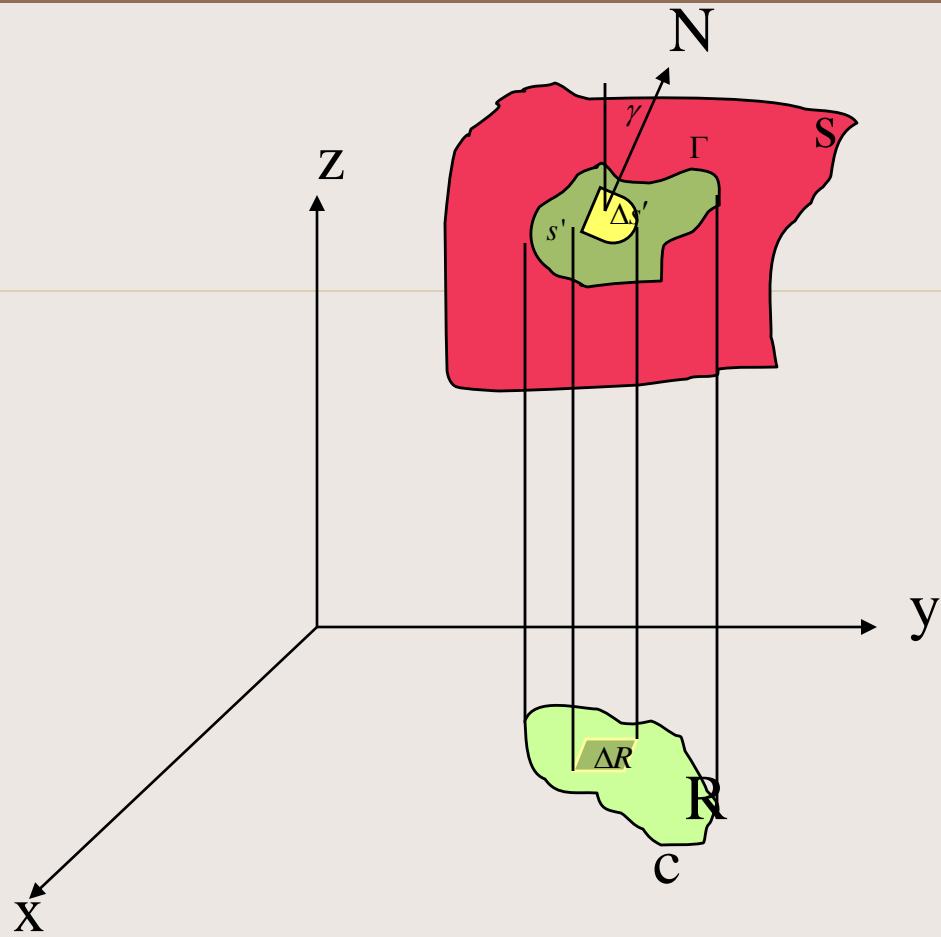
$$\nabla^2 u(1,0,1) = 0 + 6 + 12 + 0 = 18$$

انتگرال رویه ای

برای تعریف و محاسبه مساحت و سطح رویه از انتگرال‌های چندگانه استفاده می‌کنیم:

S قسمتی از سطح رویه که بوسیله منحنی بسته Γ محدود شده و $Z=f(x,y)$ معادله سطح رویه S

(با شرط اینکه هر خط موازی با محور z فقط در یک نقطه سطح S را قطع کند محاسبات قابل انجام شدن است).



C تصویر Γ روی سطح xy و γ زاویه هادی خط عمود بر S یا قائم بر S است و پس از تقسیمات جزئی روی مساحت و مجموع و حدگیری بطور خلاصه و در

نتیجه:

$$S = \int_R \sec \gamma dA =$$

$$\rightarrow \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$$

بطور مشابه اگر بر سطوح دیگر مختصات نیز تصویر کنیم با توجه به زوایای هادی فرمولهای مشابهی حاصل می شود و بطور کلی انتگرال تابع $u(x,y,z)$ روی سطح $z=f(x,y)$ را میتوان چنین تعریف نمود :

$$S = \int_R u(x, y, z) ds =$$

$$\iint_R u[x, y, f(x, y)] \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$$

مثال :

مساحت قسمتی از استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ را که در $\frac{1}{8}$

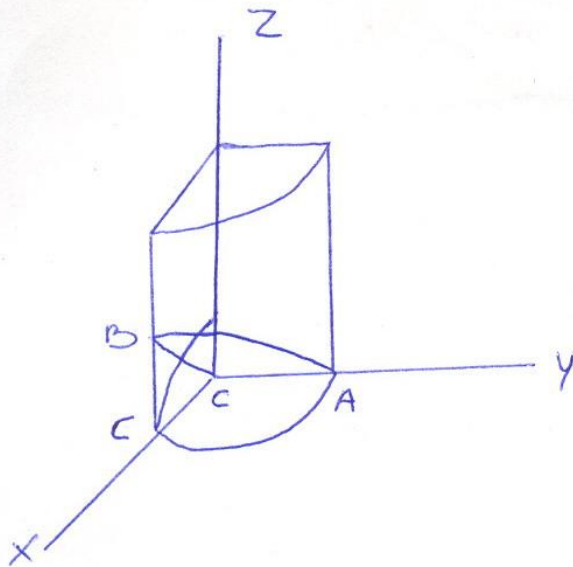
اول دستگاه مختصات بین سطوح $Z=mx$ و $Z=0$

قرار گرفته حساب کنید .

حل :

بدیهی است که فقط این سطح روی صفحات
 xz یا xy قابل تصویر نمودن است چون
 قائم بر سطح xy روی سطح قرار دارد لذا
 روی xy قابل تصویر نمودن نیست .

حال با تصویر روی xz داریم :



$$S = \int_{CAB} \sec \beta dA$$

$$\sec \beta = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1}$$

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$\sec \beta = \sqrt{0 + \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2 + 1}$$

$$= a \left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$S = \int_0^a \int_0^{mx} a \left(a^2 - x^2 \right)^{\frac{-1}{2}} dz dx$$

$$= \int_0^a amx \left(a^2 - x^2 \right)^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= a^2 m$$



ادامه جواب :

مثال :

انتگرال رویه ای $\iint_R u(x, y, z) ds$ را در صورتیکه رویه

سه‌میگون $z = 2 - (x^2 + y^2)$ بوده و $u=1$ است

محاسبه کنید . (توضیح اینکه چون $u=1$ است بنابراین $S = \iint_S ds$)

یعنی مقدار انتگرال رویه ای همان سطح رویه S است .

حل :

$$\iint_S u(x, y, z) ds =$$

$$\iint_R \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dx dy$$

$$= \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

تصویر را روی صفحه xy می نماییم :

ادامه جواب :

$$R : Z = 0 \Rightarrow 2 - (x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{12} \left(1 + 4r^2 \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{13\pi}{3}$$

تعریف دیورژانس واگرایی :

تابع برداری مفروض : $\vec{u}(x, y, z) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$

اگر تابع برداری u در تمام نقاط تعریف شده مشتق پذیر باشد .

دیورژانس تابع u عبارت است از :

$$\text{div}\vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot u$$

$$= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

مثال :

دیورژانس u را در نقطه $(1,1,1)$ حساب کنید :

$$u = xyz\vec{i} + y^3z\vec{j} + xyz^5\vec{k}$$

$$\operatorname{div}u = yz + 3y^2z + 5xyz^4 = 1 + 3 + 5 = 9$$

قضیه گرین در صفحه :

$$F(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$$

اگر R یک میدان در صفحه xy باشد که توسط منحنی C

محدود شده (منحنی بطوری است که هر خط موازی

محورهای مختصات آنرا در بیش از دو نقطه قطع نکند)

اگر P و Q توابعی پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول

پیوسته باشند در اینصورت

$$\oint_C P dx + Q dy =$$

$$\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

مثال :

با استفاده از قضیه گرین انتگرال خطی زیر را محاسبه نمایید .

$$I = \oint_c (x^2 + y^2) dx - 2xydy$$

$$c : x^2 + y^2 = 1$$

حل :

$$\begin{aligned} I &= \iint_R (-2y - 2y) dx dy = \\ &= -4 \iint_R y dx dy \end{aligned}$$

ادامه جواب :

$$= -4 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$= -4 \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} r^3 \sin \theta \Big|_0^1 d\theta$$

$$= -\frac{4}{3} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta$$

$$= +\frac{4}{3} \cos \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0$$

تبصره :

قضیه در حالتیکه منحنی بسته C طوری باشد که هر خط موازی محورهای مختصات آنرا در بیش از دو نقطه قطع کند نیز صادق است .

مثال :

انتگرال خطی زیر را روی مسیر داده شده حساب کرده و سپس با استفاده از قضیه گرین مقدار انتگرال را بدست آورید و مقایسه کنید :

$$I = \oint_C ydx + 2xdy$$

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

حل :

$$I = \int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} \quad \begin{array}{l} \text{طبق قضیه گرین می توان} \\ \text{چنین نوشت :} \end{array}$$

$$C_1 \text{ روی مسیر} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow dy = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow dx = dx \end{cases}$$

$$C_2 \text{ روی مسیر} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow dx = 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow dy = dy \end{cases}$$


 ادامه جواب :

$$C_3 \text{ روی مسیر} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow dy = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow dx = dx \end{cases}$$

$$C_4 \text{ روی مسیر} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow dx = 0 \\ 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow dy = dy \end{cases}$$

ادامه جواب :

$$I = \int_0^1 0 dx + 2x(0) + \int_0^1 y(0) + 2dy + \int_1^0 dx + 2x(0) + \int_1^0 y(0) + 2(0)dy$$

$$= \int_0^1 2dy + \int_1^0 dx$$

$$= 2y \Big|_0^1 + x \Big|_1^0 = 2 - 1 = 1$$

حال با استفاده از قضیه گرین

$$I = \iint_R (2 - 1) dx dy$$

$$= \iint_R dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 dy = 1$$

نتیجه : S مساحت میدان R را می توان از یکی از فرمولهای زیر بدست آورد :

$$S = \oint_C x dy = \iint_R dx dy$$

$$S = \oint_C y dx = -\iint_R dx dy$$

$$S = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy$$

مثال :

با استفاده از قضیه گرین سطح بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ را بدست آورید :

حل : می دانیم معادلات پارامتری مسیر بدینگونه است :

$$\vec{R}(t) = x(t)i + y(t)j$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = a \cos t \Rightarrow dx = -a \sin t dt \\ y(t) = b \sin t \Rightarrow dy = b \cos t dt \end{cases}$$

ادامه جواب :

$$S = \oint x dy = \int_0^{2\pi} (a \cos t)(b \cos t dt)$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = ab \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos^2 t}{2} dt$$

$$= \frac{ab}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{2\pi} = \frac{ab}{2} [2\pi] = \pi ab$$

تبصره :

در مختصات قطبی مساحت از فرمول زیر به روش قبل

محاسبه می شود :

$$S = \int_c^{\frac{1}{2}} r^2 d\theta$$

اولین فرم برداری قضیه گرین :

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$$

$$\vec{X}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \quad T \text{ بردار واحد مماس بر منحنی}$$

$$S \Rightarrow d\vec{x} = \vec{T}ds \quad \text{پارامتر طول قوس منحنی}$$

$$\int_c \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint_c P dx + Q dy = \iint_R (\nabla \times F) \cdot \vec{k} dx dy = \iint_R (\nabla \times F) \cdot d\vec{A}$$

که $d\vec{A}$ برداری است عمود بر میدان R و به طول $\|d\vec{A}\| = dx dy$

تعبیر فیزیکی :

اگر $F(x,y)$ نمایانگر جهت و میزان شار Flow یک سیال در نقطه (x,y) در صفحه باشد انتگرال فوق عبارت از انتگرال مولفه ای از شار است که در جهت مماس بر منحنی C است و بنام گردش F در اطراف نقاط مرزی R موسوم است .

قضیه دیورژانس (قضیه گرین در فضا)

مقدمه :

بردار نرمال خارجی یک رویه : بردار است که

بر رویه عمود بوده و جهت آن به طرف خارج رویه

باشد .

مثلا : اگر یک کره بمرکز مبدا مختصات و شعاع R

($X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$) داشته باشیم ، این کره محور

Z ها را در نقطه A و B قطع می کند آنگاه بردار نرمال

خارجی این کره در دو نقطه A و B به ترتیب K و $-K$

یعنی در جهت مثبت و منفی محور Z ها خواهد بود یعنی

$$[B(0,0,-R), A(0,0,R)]$$

قضیه دیورژانس :

عملا تبدیل انتگرال سه گانه به دوگانه و بالعکس است .

فرض کنید S یک رویه و V فضای داخلی آن و \vec{n} بردار

یکه نرمال خارجی بطوریکه تابع برداری S عبارت از

$$\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k}$$

که A_1 و A_2 و A_3

توابع پیوسته با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند

در اینصورت خواهیم داشت:

$$\iiint_v \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dV =$$

$$\iint_s A_1 dydz + A_2 dx dz + A_3 dx dy =$$

$$\iint_s (A_1 \cos u + A_2 \cos v + A_3 \cos w) ds$$

و یا

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dv = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} ds$$

دیورژانس

که u و v و w زوایای بردار نرمال خارجی رویه S در جهت مثبت مثلثاتی با محورهای مختصات است.

مثال : قضیه دیور ژانس را در مورد مساله
زیر تحقیق کنید.

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

$$s = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

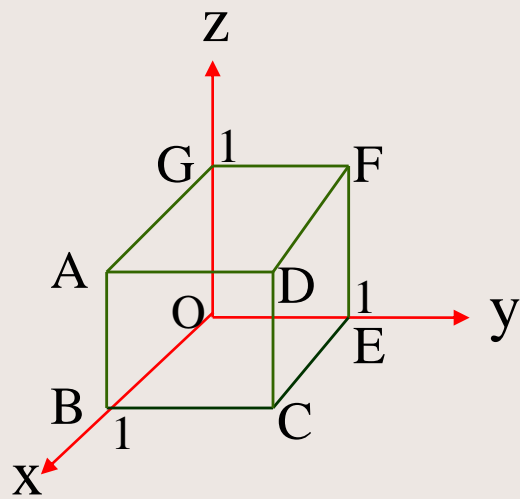
حل : $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV$: قضیه دیورژانس

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 2z) dz dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (2x + 2y + 1) dy dx$$

$$= \int_0^1 (2x + 1)y + y^2 \Big|_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 (2x + 2) dx = x^2 + 2x \Big|_0^1 = 3$$



ادامه حل : رویه S چنین است که از شش سطح تشکیل شده بنابراین داریم :

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \dots + \iint_{S_6}$$

$$S_1 = ABCD \quad , \quad \vec{n} = \vec{i} \quad x = 1$$

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{S_1} (x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}) \cdot \vec{i} ds$$

$$\iint_{S_1} x^2 ds = \int_0^1 \int_0^1 dy dz = 1$$



ادامه جواب :

$$S_2 = \text{GOEF}, \vec{n} = -i, x = 0$$

$$\Rightarrow \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = - \iint_{S_2} x^2 ds = 0$$

$$S_3 = \text{AGFD}, \vec{n} = \vec{k}, z = 1 \Rightarrow$$

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = - \iint_{S_3} z^2 ds = 1$$

ادامه جواب :

$$S_4 = BOEC, \vec{n} = -\vec{k}, z = 0 \Rightarrow$$

$$\iint_{S_4} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = - \iint_{S_4} z^2 ds = 0$$

$$S_5 = DFEC, \vec{n} = \vec{j}, y = 1 \Rightarrow$$

$$\iint_{S_5} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = - \iint_{S_5} y^2 ds = 1$$

$$S_6 = AGOB, n = -j, y = 0 \Rightarrow$$

$$\iint_{S_6} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = - \iint_{S_6} y^2 ds = 0$$

۳

دومین فرم برداری قضیه گرین (حالت خاص)

$$\oint_c p dy - q dx = \oint_c \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_R \text{div} F dx dy$$

$$\left(\text{div} F = \nabla \cdot F = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \right)$$

(با توجه به اینکه)

مثال:

اگر g تابع اسکالری با مشتقات جزئی پیوسته مرتبه اول در میدان باز s در صفحه xy باشد و R میدانی در s باشد که نقاط مرزی آن یک منحنی بسته ساده c باشد ثابت کنید

$$\oint_c \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R \nabla^2 g dx dy$$

حل:

می دانیم مشتق جهت دار g در امتداد \mathbf{n} عبارت است از:

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \nabla g \cdot \vec{n}$$

با جایگزاری داریم:

$$\oint_c \frac{\partial g}{\partial n} ds = \oint_c \nabla g \cdot \vec{n} ds = \iint_R \nabla \cdot \nabla g dx dy$$

قضیه استوکس:

حالت کلی قضیه گرین :

فرض کنید که رویه S طوری باشد که تصاویر

آن در صفحات مختصات بوسیله یک منحنی

بسته مسدود شده باشد ، اگر $z = f(x, y)$ ، $x = g(y, z)$ ، $y = h(x, z)$

معادلات رویه S باشند و توابع f, g, h پیوسته و دارای مشتقات نسبی مرتبه اول باشند. آنگاه اگر

$$A = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} + A_3 \vec{k} \Rightarrow \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times A) \cdot \vec{n} ds$$

با توجه به اینکه A_1, A_2, A_3 پیوسته و دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته و $d\vec{r} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$

مثال:

قضیه استوکس را در مورد مسئله زیر تحقیق

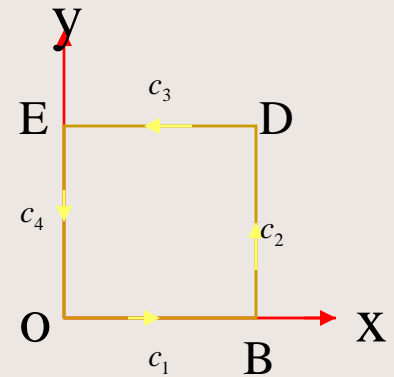
$$\vec{A} = z \vec{i} + x \vec{j} \quad s: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1 \quad \text{کنید.}$$

حل:

می خواهیم تساوی زیر (فرمول استوکس) را نشان دهیم:

تصویر S روی XY از چهار مسیر c_1 ، c_2 ، c_3 و c_4 تشکیل شده

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint \left(\nabla \times \vec{A} \right) \cdot \vec{n} \, ds$$



طرف اول

$$\int_c \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_c (z\vec{i} + x\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \int_c zdx + xdy = \int_{c1} + \int_{c2} + \int_{c3} + \int_{c4}$$

$$z = 1 : c_1 : y = 0, 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow dy = 0$$

$$\int_0^1 dx = 1$$

$$c_2 : x = 1, 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow dx = 0$$

$$\int_0^1 dy = 1$$

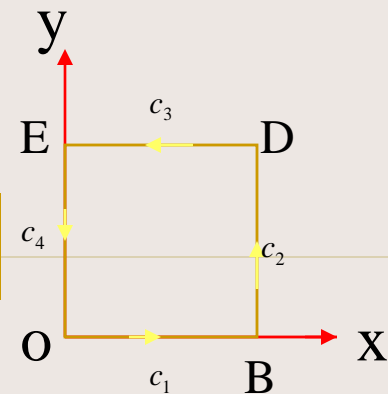
$$c_3 : y = 1, 1 \leq x \leq 0, dy = 0$$

$$\int_1^0 dx = -1$$

$$c_4 : x = 0, 1 \leq y \leq 0, dx = 0$$

$$\int 0 dy = 0$$

$$\int_c \vec{A} \cdot d\vec{r} = 1$$



طرف دوم

$$\nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial & \partial & \partial \\ \partial x & \partial y & \partial z \\ z & x & 0 \end{vmatrix} = j = k$$

چون رویه S موازی صفحه xy است پس $\vec{n} = \vec{k}$

$$(\nabla \times A) \cdot n = (j + k) \cdot k = 1 \Rightarrow \iint (\nabla \times A) \cdot n ds = \iint 1 ds = \iint_s ds = \iint_R dx dy = 1$$

با تشکر
میثمبرزگر
کارشناس ارشد عمران



MEYSAM4366 @YAHOO .COM